Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Física Armando Dias Tavares

Michael Aleixo dos Santos

Dualidade na eletrodinâmica axiônica

Rio de Janeiro
2019

Michael Aleixo dos Santos

Dualidade na eletrodinâmica axiônica

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof Dr. Marcelo Santos Guimarães

Rio de Janeiro

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

S237d Santos, Michael Aleixo dos.
Dualidade na eletrodinâmica axiônica / Michael Aleixo dos Santos. – 2019.
75 f.

Orientador: Marcelo Santos Guimarães.
Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Eletrodinâmica - Áxions – Teses. 2. Dualidade (Física nuclear) – Teses. 3. Simetria (Física) – Teses. I. Guimarães, Marcelo Santos. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando Dias Tavares.
III. Título.

CDU 537.8:539.12

Bibliotecária: Teresa da Silva CRB7/5209

Michael Aleixo dos Santos

Dualidade na eletrodinâmica axiônica

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 10 de Outubro de 2019.

Banca Examinadora:

Prof Dr. Marcelo Santos Guimarães (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof Dr. Marcelo Chiapparini
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof Dr. Vitor Emanuel Rodino Lemes
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof Dr. Luis Esteban Oxman
Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro
Universidade Federal Fluminense

Rio de Janeiro

2019

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho com muito amor à minha mãe (*in memorian*), pai (*in memorian*), padrasto, futura esposa, família, orientador e verdadeiros amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, ao Universo e à todas as coisas que me permitiram chegar até aqui. Agradeço, com todo o amor que posso sentir, à minha mãe Conceição Aparecida, pela história, pela bravura, pelos valores e, sobretudo, pelo incentivo em todos esses anos. Tenho certeza de que estás em um lugar melhor, feliz pela minha conquista e torcendo por mais sucessos. Obrigado por ter me permitido lhe ajudar nestes dois anos de muita luta e perdão por não ter conseguido finalizar antes de partir.

Agradeço ao meu padrasto Jones Peres por ter sido um verdadeiro pai e por estar presente sempre que eu mais precisei. Aproveito para agradecer à família Peres por todo o carinho. Agradeço a todos de minha família com destaque para a minha irmã Michelli Aleixo por todos os ensinamentos. Agradeço também ao meu sobrinho Willian Aleixo pela sobriedade. Agradeço à minha tia Maria do Carmo por sempre cuidar de todos nós com muito zelo e amor. Agradeço à minha avó Suzette pela minha incrível infância e ao meu pai Aryel dos Santos pela vida.

Agradeço à família Imbelloni por todo o carinho, pela receptividade, pelos desejos de sucessos e principalmente por toda a ajuda nestes últimos meses. Agradeço em especial à minha futura esposa Laís Imbelloni por viver comigo um amor que jamais imaginei existir.

Agradeço às famílias Borges e Pimentel pelo amor e pelo carinho de todos estes anos, sobretudo ao meu verdadeiro irmão, Jean Borges.

Agradeço aos meus grandes e numerosos amigos - de agora e de longa data - por todos os momentos de alegrias e pelos abraços nos momentos certos, em especial para Natasha Gasparelli, Leandro Meireles, Marcos Guedes e Eduardo Cavadas, Juliana Ramos e Eduardo Fernandes, cuja amizade beira os 10 anos. Agradeço aos meus amigos Sílvia Nunes e Breno Chrispim por toda a brilhante sintonia acadêmica que tivemos.

Agradeço ao meu orientador Marcelo Guimarães pela amizade, pela confiança, pela parceria e, sobretudo, pela empatia em todos esses anos. Agradeço por me inspirar, por me motivar e por representar o profissional que desejo sempre ser para os meus alunos.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Física da UERJ pela compreensão no momento que mais precisei.

Agradeço a todos os meus professores de toda a minha trajetória acadêmica e à Capes pelo incentivo, patrocínio e confiança neste presente trabalho.

Agradeço a todos que direta ou indiretamente puderam contribuir com todo este fechamento de ciclo representado por esta pesquisa.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Muito obrigado!

Quanto mais perto estamos de algo, maior se torna.
Para ultrapassar obstáculos, é necessário dar passos para trás.
Isso não é retroceder, mas, sim, progredir.
Michael Aleixo dos Santos

RESUMO

SANTOS, M. A. *Dualidade na eletrodinâmica axiônica*. 2019. 75 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

A Eletrodinâmica Axiônica é uma teoria que possui uma vasta aplicabilidade. Ela é definida por um modelo composto por um fóton e um campo escalar representado pelo campo de áxion. Além das aplicações em materiais topológicos, o áxion é utilizado na Astrofísica nuclear, por exemplo, como um dos fortes candidatos à matéria escura. Neste trabalho o foco é construir uma ação local com dualidade para o sistema composto pelo campo de áxion e cargas elétricas e magnéticas. Inconsistências são apresentadas em algumas das tentativas de se construir a ação. O objetivo é alcançado graças a inclusão de um fóton dual que consegue estabelecer a dualidade eletromagnética.

Palavras-chave: Dualidade. Simetria. Eletrodinâmica. Áxion.

ABSTRACT

SANTOS, M. A. *Duality on axion electrodynamics.* 2019. 75 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

The Axion Electrodynamics is a theory that has a huge applicability. It is defined by a model composed of a photon and a scalar field denoted by axion field. Besides applications in topological materials, the axion is used in Nuclear Astrophysics, for example, as one of the strong candidates to dark matter. In this work, the focus is on building a local action with electromagnetic duality for the system composed by the axion field and electric charges and magnetic monopoles. Inconsistencies are presented in some of the attempts to construct the action. The goal is reached with the introduction of a dual photon that establishes the electromagnetic duality.

Keywords: Duality. Symmetry. Electrodynamics. Axion.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo principal discutir como a dualidade eletromagnética pode ser estabelecida em um contexto específico no campo da Eletrodinâmica Axiônica. O interesse é compreender como construir uma ação local com dualidade para um sistema com cargas elétricas e magnéticas na presença do campo de áxion.

Ainda que não se tenha como foco discutir a fenomenologia sobre os materiais topológicos, é feita uma abordagem rápida sobre estes materiais que têm fomentado inúmeras pesquisas atualmente. Embora o áxion tenha surgido em um contexto específico na Cromodinâmica Quântica; sua estrutura matemática tem sido utilizada para descrever fenomenologias de vários sistemas físicos, como a do próprio supercondutor topológico. No campo da Astrofísica Nuclear, por exemplo, o áxion surge como um bom candidato à matéria escura.

Esta é uma proposta de estender um trabalho feito anteriormente (ALEIXO, 2016), inspirado no plasma de Meyer-Vernet (MEYER-VERNET, 1982) que era carregado por cargas elétricas e magnéticas. O termo θ, apresentado como uma constante, será encarado nesta dissertação como um campo, o que dificultará ainda mais o tratamento matemático.

Foi encontrada no artigo (RODRIGUES, 2018), cuja inspiração foi obtida através do artigo (VISINELLI, 2013), uma proposta de alcançar a dualidade eletromagnética através de um *ansatz*. Para isto o artigo (RODRIGUES, 2018) apresenta uma lagrangiana usual para a Eletrodinâmica Axiônica que gera equações de movimento para os dois campos, sendo uma delas a equação de Klein-Gordon. No entanto, ao impor a tentativa de dualidade violando a identidade de Bianchi (diferentemente do que é o esperado na literatura usual sobre Eletrodinâmica Axiônica como no artigo do Wilczek (WILCZEK, 1987)), a ação apresentada é desvalidada e, portanto, uma nova deveria ser apresentada. E isto pareceu um pouco curioso e a busca pela ação deste sistema fomentou inúmeros questionamentos que serão apresentados no presente estudo. Primeiro será demonstrado que, na ordem de derivadas escolhida, não é possível expor uma ação dual.

Ainda que não expor uma ação não desqualifique a teoria do modelo, uma inconsistência despertou a atenção e será demonstrada com a proposta de justificar que a tentativa de dualidade através do *ansatz* está equivocada.

Algumas tentativas de se atingir o objetivo são apresentadas com o intuito de fornecer um guia para a etapa final em que o mesmo é alcançado através da inclusão de um fóton na teoria. Portanto, o objetivo será consolidado com a apresentação de uma ação local que contempla áxions - cuja dinâmica é descrita pela equação de Klein-Gordon -, cargas elétricas e o monopolo de Dirac. Além disso, a dualidade eletromagnética será exposta através do conjunto de transformações de dualidade entre os campos que garantirá a invariância da ação e de todo o sistema.

No primeiro capítulo, o Eletromagnetismo Clássico será revisado com o intuito de apresentar as equações de Maxwell na sua forma usual e também em versões mais gerais como a descrição de um meio material ou até mesmo na proposta de simetrização com a inclusão do monopolo de Dirac. Será apresentada também a formulação covariante da Teoria Eletromagnética além de mencionar consequências que surgiram com o trabalho de Peccei-Quinn (PECCEI, 1977). Discussões importantes sobre a Corda de Dirac são feitas como uma forma de ressaltar uma das possíveis formas de se incluir monopolos na teoria. É importante incluir um adendo. Embora os monopolos magnéticos ainda sejam hipotéticos, muitos pesquisadores ao redor do mundo investem em pesquisas associadas ao tema. O Centro Londrino de Tecnologia é um dos grandes exemplos desses grupos de físicos que promove estudos em colaboração [1] com a Universidade de Oxford. Uma das pesquisas mais recentes publicadas neste ano vem de um grupo estadunidense feita através da colaboração ATLAS [2], cujo detector buscava encontrar os tais monopolos através de um canal próton-próton.

Já no segundo capítulo, surge a Eletrodinâmica Axiônica ao se estabelecer o sistema com a descrição proposta no artigo (RODRIGUES, 2018), cuja abordagem será utilizada como fonte das discussões que surgirão. Inicialmente as inconsistências serão apresentadas como uma forma de instigar a busca pela ação dual. O artigo (SINGLETON, 1995) busca descrever um sistema sem áxions com o uso de dois potenciais, cujo modelo foi originalmente desenvolvido por (ZWANZIGER, 1971). O capítulo será encerrado com a apresentação de um problema: a carga encontrada - que deveria ser o monopolo magnético proposto por Dirac (DIRAC, 1948) - será mais uma carga elétrica, o que fará com que o objetivo, embora próximo, ainda não terá sido atingido.

No terceiro e último capítulo, o objetivo é alcançado com a solução do problema do monopolo encontrada no capítulo anterior. A própria redefinição dos campos tornará o problema solúvel e as transformações de dualidade serão expostas com o intuito de apresentar como a dualidade eletromagnética foi definida para o sistema com dois fótons. O não-protagonismo do fóton dual inserido na teoria, embora seja justificado no trabalho do Singleton (SINGLETON, 1995) através do Mecanismo de Higgs (HIGGS, 1964b) (HIGGS, 1964a) (HIGGS, 1965), quebra totalmente a simetria de dualidade já estabelecida.

[1] Confira a matéria em: https://www.london-nano.com/research/magnetic-monopoles-discovered-lcn-scientists

[2] Confira o artigo publicado em: https://arxiv.org/pdf/1905.10130.pdf

1 A ELETRODINÂMICA CLÁSSICA

Neste capítulo será demonstrado em uma forma de revisão tudo o que é amplamente discutido na literatura sobre o Eletromagnetismo Clássico. A primeira abordagem será feita sob a perspectiva usual e mais conhecida e, posteriormente, a discussão terá seu foco alterado em virtude de inclusões e/ou modificações no sistema estudado.

1.1 O Eletromagnetismo Usual

Na literatura, o Eletromagnetismo Clássico é regido, basicamente, pelas quatro equações de Maxwell. Trata-se de um conjunto de leis físicas, bastante conhecidas principalmente por seus efeitos, que são apresentadas em conjunto como uma forma de resumir todos os fenômenos eletromagnéticos. Em unidades do sistema internacional, elas podem ser representadas por

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}; \tag{1}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0; \tag{2}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \tag{3}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0\vec{J}. \tag{4}$$

Os campos elétrico e magnético são representados por $\vec{E}$ e $\vec{B}$, respectivamente. As fontes são representadas pela densidade volumétrica de carga elétrica e pela densidade de corrente elétrica representadas, respectivamente, por ρ e $\vec{J}$.

A equação (1) é também conhecida por Lei de Gauss. Basicamente relaciona o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada - conhecida por gaussiana - com a carga elétrica total envolvida pela mesma superfície. Já a equação (2), que possui uma forma matemática semelhante, nos leva à nulidade. Existe uma característica puramente geométrica que torna a compreensão mais clara: as linhas de campo elétrico são abertas enquanto as de campo magnético são fechadas. Por tal razão, essa segunda equação é conhecida por registrar a inexistência dos monopolos magnéticos. Aqui cabe enfatizar que, na Natureza, a configuração magnética mais simples existente até o presente momento é a de dipolo magnético, ainda que existam monopolos elétricos, como o elétron, por exemplo.

A equação (3) é conhecida por Lei de Faraday-Neumann-Lenz e define a indução eletromagnética, ou seja, a capacidade de uma força eletromotriz induzida surgir no sistema a partir de uma variação do fluxo magnético. A contribuição dada por Lenz com o sinal negativo é traduzido pela oposição do fluxo magnético em relação ao sentido do campo magnético gerado pela corrente induzida.

A quarta e última equação (4) é conhecida por Lei de Ampère-Maxwell. A lei original não tem a contribuição dada por Maxwell com o termo que contém o campo elétrico, conhecida por "corrente de deslocamento". O entendimento sobre esta lei é também geométrica como a Lei de Gauss, ou seja, uma curva fechada conhecida como amperiana se relaciona com a corrente que atravessa a área delimitada pela mesma.

A explicação do motivo pelo qual Maxwell achou necessário incluir a corrente de deslocamento pode ser vista tomando o divergente desta última equação sem este termo para encontrar $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0$, já que o divergente de todo rotacional é nulo. Em Mecânica dos fluidos essa consequência caracterizaria o fluido como incompressível. Como a densidade volumétrica de carga não é constante, faz-se necessário incluir o termo proposto por Maxwell obtendo-se, portanto,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{5}$$

que é conhecida como equação da continuidade e que basicamente estabelece a conservação da carga elétrica presente no sistema, o que é um princípio bem forte e fundamental.

É sabido que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ compõem o que é conhecido por campo eletromagnético. Sendo a luz uma onda eletromagnética é intuitivo pensar que ela seja definida a partir destes dois campos. É imediato desejar obter uma equação para a onda eletromagnética - luz - e isto pode ser feito a partir do grupo de equações de Maxwell.

Aplicando o rotacional na equação (3) tem-se

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right). \tag{6}$$

Usando a identidade

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} \tag{7}$$

e a equação (4), a equação anterior se torna

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{J}\right). \tag{8}$$

E usando (1) ficará com a forma

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) - \nabla^2\vec{E} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}. \tag{9}$$

Esta é a equação da onda eletromagnética em termos do campo elétrico. Pode-se repetir todos os processos de forma análoga para obter a equação da onda em termos do campo magnético.

Aplicando o rotacional na equação (4) tem-se

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{J} \tag{10}$$

Usando a mesma identidade (7), a equação anterior pode ser reescrita sob a forma

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{J} \tag{11}$$

E usando as equações (2) e (3), é fácil encontrar

$$-\nabla^2 \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{J} \tag{12}$$

que é a equação de onda procurada em termos do campo magnético.

É possível perceber que há duas equações de onda, uma para cada campo. Isto é, há uma independência entre os campos elétrico e magnético quando usados para descrever a onda eletromagnética. Os termos das fontes que aparecem - como as densidades de corrente e de carga - apenas tornam a equação mais completa.

É possível tornar a descrição mais simples. Para isto, basta assumir que todas as fontes são nulas. Em outras palavras, deve-se assumir $\rho = 0$ e $\vec{J} = \vec{0}$.

Essas considerações caracterizam o vácuo que, basicamente, é descrito através da ausência de cargas ou fontes. Assim as duas equações assumem a forma

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{13}$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{14}$$

Aqui cabe ressaltar a igualdade encontrada na literatura

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \tag{15}$$

em que c [3] é a velocidade da luz, já que é comum ter o termo de velocidade aparecendo explicitamente em uma equação de onda.

É ingênuo pensar que as duas equações anteriores são idênticas apenas trocando

[3] c, do latim celeritas, a velocidade.

$\vec{E}$ por $\vec{B}$. Essa simples troca possui uma discussão bem aprofundada e é conhecida por dualidade eletromagnética.

Quando o vácuo é estabelecido (anulando-se as cargas), as equações de Maxwell apresentam essa dualidade que não é tão simples quanto a esta sugerida nas equações de onda. Livres de fontes elas se tornam

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0; \tag{16}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0; \tag{17}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \tag{18}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{19}$$

É possível notar que há uma simetria nestas quatro equações, de forma que os campos parecem ter o mesmo "peso, importância". Para estabelecer as transformações de dualidade entre os campos basta assumir

$$\vec{E} \to \vec{B} \tag{20}$$

$$\vec{B} \to -\mu_0 \varepsilon_0 \vec{E}. \tag{21}$$

Para se tornar mais claro é importante resumir o conceito de dualidade que nada mais é do que a capacidade de trocar termos - neste caso os campos da forma explicitada anteriormente - sem que haja qualquer alteração na Natureza, ou seja, tudo é perfeitamente análogo, não há nenhuma informação nova. Pode-se ainda pensar em indistinguibilidade, se facilitar.

Como foi discutido, as equações de Maxwell podem sofrer alterações dependendo do que é considerado. Há uma outra forma de visualizar este conjunto de equações, principalmente quando deseja-se descrever um meio qualquer.

Diferentemente do vácuo, um meio qualquer (pense no ar, na água, em uma substância que possui cargas) possui cargas livres que têm dinâmica própria. Ocorrem dois fenômenos característicos conhecidos por polarização e magnetização que são, basicamente, a forma como o meio responde às cargas.

As fontes externas são responsáveis por gerar esses dois efeitos. Analisando, inicialmente, a densidade volumétrica de carga, pode-se pensar que uma parte é inerente ao meio - ou acopladas - e uma outra parte está simplesmente livre. Denotando as duas, respectivamente, por ρ_b e ρ_f [4], pode-se escrever

$$\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho = \rho_b + \rho_f \tag{22}$$

Define-se a resposta elétrica do meio dada ao sistema por polarização elétrica, representada por $\vec{P}$, da seguinte forma

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \tag{23}$$

Assim, a Lei de Gauss (1) ganha a forma

$$\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f \tag{24}$$

Denotando o termo entre parênteses por um novo campo, tem-se

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \tag{25}$$

em que $\vec{D}$ é conhecido por deslocamento elétrico.

De forma análoga, pode-se considerar a resposta magnética do meio e defini-la por polarização magnética - ou simplesmente magnetização - representada por $\vec{M}$. Considerando que também acontecerá o mesmo com a densidade de corrente elétrica, ou seja, uma parte da densidade de corrente estará acoplada e outra livre, pode-se escrever

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J} = \vec{J}_b + \vec{J}_f \tag{26}$$

Sendo $\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M}$, a Lei de Ampère-Maxwell (4) se torna

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{J}_f \tag{27}$$

Define-se o termo entre parênteses como um novo campo, para apresentar

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f \tag{28}$$

em que $\vec{H}$ é conhecido por campo magnético auxiliar.

Essas novas redefinições de campo compõem um par de equações que foram obtidas segmentando as fontes externas. Elas são conhecidas por relações constitutivas e podem

[4] b, do inglês bound, acoplado e f, do inglês free, livre - conforme é encontrado na literatura.

ser expressas por

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{29}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}. \tag{30}$$

Desta forma, as novas equações de Maxwell teriam a forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f; \tag{31}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0; \tag{32}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \tag{33}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_f. \tag{34}$$

1.2 Simetrização das Equações de Maxwell

Um assunto que rende olhares curiosos é a famosa inseparabilidade dos pólos magnéticos de um imã. É sabido que se um imã for cortado na tentativa de separar o pólo norte do sul haverá um rearranjo que manterá os polos unidos. Esta discussão é expressa pela equação (2) e o dipolo magnético parece ser a configuração magnética mais simples possível.

Paul Dirac provavelmente deve ter se encantado com esta conclusão curiosa no Eletromagnetismo e se dedicou a estudar os famosos monopolos magnéticos, como fez no seu trabalho (DIRAC, 1948). O monopolo deveria ser uma partícula - hipotética ainda, pois ainda não foi comprovada experimentalmente - que gerasse um campo magnético radial da mesma forma que uma carga elétrica o faz. Esse *toy model* possui um modelo bastante intuitivo e que resgata toda uma visão de equilíbrio, de simetria que muitos estudos acabam buscando. Incluir monopolos magnéticos nas equações de Maxwell é, basicamente, reproduzir o setor magnético em analogia ao setor elétrico. Torna-se fácil perceber que, uma vez que a teoria é composta por monopolos magnéticos, deveria haver um termo de corrente magnética, também de forma análoga.

As equações de Maxwell com monopolos magnéticos, em unidades do sistema internacional, devem ter a forma

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}; \tag{35}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=\mu_0\rho_m; \tag{36}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-\mu_0\vec{J}_m; \tag{37}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0\vec{J}_e. \tag{38}$$

A inclusão dos termos magnéticos inexistentes de forma usual transmite um equilíbrio que parecia ser uma realidade bem consolidada. Por tal razão, inúmeros estudos ainda são feitos por conta da consistência matemática que este tipo de modelo proporciona.

Pode-se realizar os mesmos procedimentos já realizados para este caso e obter, por exemplo, as equações da continuidade e de onda para ambos os campos elétrico e magnético.

Aplicando o divergente na equação (37) e usando a nulidade existente na aplicação deste operador no rotacional, tem-se

$$0=-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})-\mu_0\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_m \tag{39}$$

E usando a equação (36), torna-se

$$\frac{\partial\rho_m}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_m=0 \tag{40}$$

que é a equação da continuidade para as cargas magnéticas cuja forma matemática é a mesma que em (5).

Analogamente, pode-se aplicar o divergente em (38) e usar (35) para obter

$$\frac{\partial\rho_e}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_e=0 \tag{41}$$

que é a equação da continuidade para as cargas elétricas.

Para obter a equação de onda em termos do campo elétrico, basta tomar o rotacional da equação (37)

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)-\mu_0\vec{\nabla}\times\vec{J}_m. \tag{42}$$

Usando (7) e a equação (38) tem-se

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0\vec{J}_e\right)-\mu_0\vec{\nabla}\times\vec{J}_m. \tag{43}$$

E usando (35) chega-se a

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}\right) - \nabla^2\vec{E} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0\frac{\partial\vec{J}_e}{\partial t} - \mu_0\vec{\nabla}\times\vec{J}_m, \tag{44}$$

que é a equação de onda para o campo elétrico. Admitindo o caso $\rho_e = 0$ e $\vec{J}_e = \vec{J}_m = \vec{0}$ chega-se a equação (13).

Pode-se ainda obter a equação de onda em termos do campo magnético. Para isso, deve-se aplicar o rotacional na equação (38), isto é

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) + \mu_0\vec{\nabla}\times\vec{J}_e \tag{45}$$

Usando (7) e (37) pode-se expor

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \nabla^2\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \mu_0\vec{J}_m\right) + \mu_0\vec{\nabla}\times\vec{J}_e \tag{46}$$

E usando (36) a equação se torna

$$\vec{\nabla}(\mu_0\rho_m) - \nabla^2\vec{B} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} - \mu_0^2\varepsilon_0\frac{\partial\vec{J}_m}{\partial t} + \mu_0\vec{\nabla}\times\vec{J}_e \tag{47}$$

que é a equação de onda geral escrita em termos do campo magnético. Retorna-se à equação (14) considerando-se o vácuo.

Analisando as equações de onda gerais em termos dos dois campos, percebe-se que sempre há termos de corrente elétrica e de corrente magnética nas duas. Esse é um efeito bastante curioso. Trata-se da manifestação de forma simples de algo que se assemelha ao efeito Witten (WITTEN, 1979), que nada mais é do que termos de natureza elétrica produzir outros termos de natureza magnética e vice-versa.

A pergunta que deve ficar é: como a dualidade se mantém com tais alterações?

Faz-se necessário propor uma discussão bem interessante sobre os espaços: usual e dual. Estes espaços serão melhor debatidos posteriormente, mas neste caso compreender a dualidade se torna mais fácil se forem apresentados.

O espaço usual é tido como o espaço de trabalho, onde as coisas normalmente acontecem e são calculadas. Já o espaço dual é visto como uma nova perspectiva que é obtida a partir de uma transformação. Seria o conceito de imagem associado à função, quando se obtém um valor final a partir de uma lei que é aplicada a um valor inicial no domínio. Essa passagem entre os espaços é amplamente utilizada em inúmeros campos da Ciência sobretudo para facilitar o cálculo e/ou a descrição. Pode-se exemplificar com as Transformadas de Laplace, de Legendre, de Fourier.

Compreender a dualidade eletromagnética para um sistema pouco mais complexo não é tão imediata. É fácil perceber que fora do vácuo a relação entre os termos precisa ser estendida e isso não é válido apenas para os campos, ou seja, as próprias densidades de carga e corrente também participarão do processo.

Com a inclusão dos monopolos magnéticos nas equações de Maxwell, o processo não é tão simples quanto trocar $\vec{E}$ por $\vec{B}$, ou seja, novas transformações simultâneas deverão ser feitas entre os termos para que a dualidade seja estabelecida.

Analisando as equações de Maxwell com carga e corrente magnéticas, pode-se expor a seguinte relação de dualidade entre os termos

$$\vec{E} \rightarrow \vec{B} \quad ; \quad \vec{B} \rightarrow -\mu_0\varepsilon_0\vec{E}; \tag{48}$$

$$\rho_e \rightarrow \mu_0\varepsilon_0\rho_m \quad ; \quad \rho_m \rightarrow -\rho_e; \tag{49}$$

$$\vec{J}_m \rightarrow -\vec{J}_e \quad ; \quad \vec{J}_e \rightarrow \mu_0\varepsilon_0\vec{J}_m. \tag{50}$$

A discussão pode ser estendida propondo o entendimento a partir da abordagem matricial da transformação. Usando as transformações anteriores, pode-se expor

$$\begin{pmatrix} \rho'_e \\ \rho'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu_0\varepsilon_0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho_e \\ \rho_m \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \rho'_e \\ \rho'_m \end{pmatrix} = \Lambda_{2\times 2} \cdot \begin{pmatrix} \rho_e \\ \rho_m \end{pmatrix} \tag{51}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{J}'_e \\ \vec{J}'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu_0\varepsilon_0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{J}_e \\ \vec{J}_m \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \vec{J}'_e \\ \vec{J}'_m \end{pmatrix} = \Lambda_{2\times 2} \cdot \begin{pmatrix} \vec{J}_e \\ \vec{J}_m \end{pmatrix} \tag{52}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{E}' \\ \vec{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \vec{E}' \\ \vec{B}' \end{pmatrix} = \Omega_{2\times 2} \cdot \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} \tag{53}$$

Esta abordagem é bastante conhecida e as matrizes Λ e Ω pertencem ao grupo $SO(2)$, que é o grupo das matrizes de rotação 2×2.

1.3 A contribuição de Peccei-Quinn

Na Cromodinâmica Quântica, que é uma teoria de campos para a interação forte entre os quarks e glúons, há um problema conhecido por "CP forte" que, para solucioná-lo, foi introduzido na teoria um bóson hipotético conhecido por áxion. Esta teoria que propõe tal solução foi desenvolvida por Peccei e Quinn em 1977 (PECCEI, 1977).

É sabido que Topologia é um campo da Matemática que estuda propriedades de objetos ou entidades que se mantém invariantes sob transformações consideradas suaves (NAKAHARA, 2003); e que isolantes são todos os tipos de materiais ou dispositos capazes de impedir certo tipo de transferência de energia/informação (GRIFFITHS, 1999).

Os materiais topológicos são todos aqueles que possuem uma ordem topológica de origem quântica que providenciam propriedades evidenciadas através da topologia, isto é, suas propriedades são invariantes sob transformações topológicas. Os exemplos mais encontrados são os próprios isolantes topológicos, semimetais de Weyl e de Dirac, entre outros (ANDO, 2013).

Como um tipo de material topológico, os isolantes topológicos são todos os materiais que se comportam em seu interior como um isolante usual, mas que em sua borda possui um estado condutor não-trivial que permite que elétrons se movam livremente por toda a superfície sem que haja dissipação de energia. Há ainda uma forma de se definir um isolante topológico através das diferentes fases que são caracterizadas por um invariante topológico, ou seja, um número (FURUSAKI, 2010).

Nesta etapa, é necessário fazer um adendo para evitar confusões. Existe na literatura o conceito de supercondutor, supercondutor topológico e isolante topológico. Este último já foi descrito acima e toda a fenomenologia está relacionada com os férmions de Weyl (WEYL, 1929) que permite a condução em toda a borda.

No caso do supercondutor topológico a condução é feita por férmions de Majorana (MAJORANA,), que também são conhecida por quasipartículas de Bogoliubov. Para um supercondutor usual, os pares de Cooper da teoria BCS (COOPER, 1956) (COOPER, 1957a) (COOPER, 1957b) são os responsáveis pela fenomenologia da condução sem resistência.

Não são apenas essas as únicas diferenças entre supercondutores topológicos e isolantes topológicos. É possível encontrar o termo θ como aquele responsável por descrever o isolante topológico e encarado durante todo o formalismo como uma constante. Ele é quem descreve a resposta eletromagnética através dos campos externos e escolhido como $\theta = \pi$ com o intuito de manter a simetria de reversão temporal (MARTIN-RUIZ, 2019).

Para o supercondutor topológico a diferença pode ser sutil, mas produz consequências bem distintas, já que o mesmo é sempre visto como um campo, isto é, $\theta = \theta(x)$. Neste caso, tal campo é conhecido por campo de áxion.

Resumindo, quando θ é uma constante, tem-se na teoria o termo topológico que acabará descrevendo isolantes topológicos. Mas se acaso θ for um campo, existe na teoria o campo de áxion que auxiliará na descrição dos supercondutores topológicos. Uma boa revisão sobre estes assuntos pode ser encontrada no artigos (SATO, 2016) (ZHANG, 2010).

Será que é possível estudar um sistema de cargas elétricas e magnéticas na presença de áxions? Embora este novo "*toy model*" seja ainda mais elaborado do que simplesmente ter monopolos magnéticos, a descrição não é tão complexa, principalmente quando se considera o termo θ como constante.

As equações de Maxwell sofreriam uma mudança, porém não de forma explícita. A inclusão de "áxions", que pode ser chamado por termo topológico, é um pouco mais sutil. Na literatura, encontra-se um modelo bastante coerente sobre tal inclusão que aproveita a forma como os campos são descritos no interior do meio considerado. É feito através das equações (29) e (30), nas quais o termo topológico é acrescentado no lugar da polarização.

As novas relações constitutivas para o meio teriam a forma

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} - \theta\vec{B}; \tag{54}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} + \theta\vec{E}. \tag{55}$$

Relações semelhantes podem ser encontradas no artigo (ZHANG, 2009), em que o termo axiônico auxilia na descrição do sistema produzindo um efeito que pode ser mapeado no método clássico de carga-imagem do Eletromagnetismo. Vale ressaltar que os termos μ e ε agora são expressos sem índice, pois representam as constantes do meio considerado, diferentemente do vácuo.

Com tais modificações, as equações de Maxwell ficariam parecidas com as formas (31) - (34), ou seja

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_e; \tag{56}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu\rho_m; \tag{57}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \mu\vec{J}_m; \tag{58}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_e. \tag{59}$$

É possível perceber imediatamente que as equações da continuidade (40) e (41) permanecem invariantes. No entanto, ao repetir os processos para obter as equações de onda para os campos, é possível perceber que o termo θ acopla as equações e a dependência de $\vec{E}$ com $\vec{B}$ ficará consolidada. Como feito em (ALEIXO, 2016) e apresentado no APÊNDICE A, a manifestação do efeito Witten (WITTEN, 1979) é gerada a partir da inclusão do termo axiônico. Ao analisar o acoplamento gerado pelo termo θ no espaço de Fourier, obtém-se as equações

$$-\frac{\partial^2\rho_e}{\partial t^2} = \omega_e^2(\rho_e + \theta\mu\rho_m); \tag{60}$$

$$-\frac{\partial^2\rho_m}{\partial t^2} = \omega_m^2\rho_m + \frac{\theta\omega_m^2}{\varepsilon}(\rho_e + \theta\mu\rho_m). \tag{61}$$

Fica fácil notar que a condição $\theta = 0$ desacopla as equações e consequentemente as equações de onda. Estas equações acabam demonstrando que flutuações de carga magnéticas produzem cargas elétricas e vice-versa. O efeito Witten (WITTEN, 1979) acaba por definir o termo $\rho_e + \theta\mu\rho_m$ como um "*toy model*" de um dyon como proposto por (SCHWINGER, 1969), ou seja, pode-se tratar o sistema como um em que as partículas possuem cargas elétricas e magnéticas de forma simultânea.

1.4 Plasma

Em 1981 a física francesa Nicole Meyer-Vernet publicou um artigo que continha a descrição de um plasma carregado com cargas elétricas e magnéticas, com equações semelhantes àquelas já apresentadas anteriormente.

Já foi apresentado em um trabalho anterior (ALEIXO, 2016) uma possível extensão da abordagem feita por ela, já que a mesma desprezou termos não-lineares que vinham da força de Lorentz. No entanto, a generalização não foi somente por conta deste aspecto. Foi incluído o termo axiônico como uma proposta de apresentar o plasma como um material de ordem topológica.

Em uma abordagem inicial, pretende-se discutir como é definido o processo de incluir o termo topológico no plasma de Meyer-Vernet e expor uma relação de dispersão para este caso mais simples.

O plasma é apenas um meio carregado por cargas elétricas e magnéticas que interagem apenas pela força eletromagnética. Os campos elétrico e magnético podem ser encarados como agentes externos e providenciam toda a dinâmica do plasma. Não há direção privilegiada para a movimentação das cargas e o termo axiônico continua sendo um parâmetro constante como já apresentado.

A proposta se iniciou explicitando a forma mais geral da densidade de força de Lorentz (força por unidades de volume) para as cargas elétricas e magnéticas presentes no plasma

$$\vec{f} = \rho_e \vec{E} + \vec{J}_e \times \vec{B} + \mu \rho_m \vec{H} - \mu \vec{J}_m \times \vec{D} \tag{62}$$

É possível perceber que a carga elétrica responde pelos dois primeiros termos enquanto a magnética sofre a ação dos dois últimos. Ao escrever a segunda Lei de Newton para cada tipo de carga encontra-se

$$n_e m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = n_e e_e \vec{E} + n_e e_e \vec{v}_e \times \vec{B}; \tag{63}$$

$$n_m m_m \frac{m\vec{v}_e}{dt} = n_m e_m \mu \vec{H} - \mu n_m e_m \vec{v}_m \times \vec{D}, \tag{64}$$

em que n_e/n_m são, respectivamente, o número de cargas elétrica/magnética por unidades de volume; e_e/e_m são, respectivamente, as cargas elementares para as naturezas elétrica/magnética; e $\vec{J}$ é o produto entre a densidade volumétrica de carga ρ e a velocidade $\vec{v}$.

Em seu artigo (MEYER-VERNET, 1982), Meyer-Vernet desprezou os termos de produto vetorial admitindo que se trata da aproximação de *cold-plasma*. Na literatura, encontra-se um conjunto de características físicas de origem experimental para esta aproximação. O conceito de plasma frio pode ser definido por considerar que a pressão no interior do plasma, considerando todos os tipos de cargas, não é importante para a propagação de ondas eletromagnéticas ou que as velocidades térmicas das partículas são muito menores que qualquer outra velocidade.

A pergunta que fica é: como incluir o termo axiônico nesta descrição? A solução já foi apresentada anteriormente. Como a força de Lorentz possui os campos auxiliares $\vec{D}$ e $\vec{H}$; o termo axiônico será incluso através das relações constitutivas, ou seja, as equações (54) e (55) redefinirá os campos de forma que o termo θ seja incluso.

Toda esta simplificação tem como consequência expor um processo algébrico menos tortuoso. De uma análise feita no espaço de Fourier (ALEIXO, 2016) encontra-se a relação de dispersão para este caso

$$(\omega^2 - \omega_e^2)(\omega^2 - \omega_m^2) - \frac{\mu}{\varepsilon}\omega^2\omega_m^2\theta^2 = \frac{k^2\omega^2}{\mu\varepsilon}. \tag{65}$$

O processo completo pode ser encontrado em APÊNDICE A. É importante antecipar que assumindo $\theta = 0$, as conclusões obtidas por Meyer-Vernet tornam-se válidas.

Vale ressaltar que nesta abordagem feita como uma extensão do artigo de Meyer-Vernet, o termo axiônico é uma constante, ou seja, não se trata do áxion como é visto na literatura como um campo. Esta consideração de $\theta = \theta(\vec{x}, t)$ será feita posteriormente.

1.5 Forma Covariante da Teoria Eletromagnética

Aproveitando toda a álgebra dos tensores utilizada na Relatividade, pode-se escrever - sob uma forma condensada através da notação indicial - a Teoria Eletromagnética em uma abordagem que é conhecida na literatura por forma covariante.

A métrica que será utilizada, por convenção, é

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{66}$$

em que os índices gregos como μ e ν variam de 0 a 3; e os latinos i e j, por exemplo, variam de 1 a 3 e representam apenas a parte espacial do que é conhecido por quadrivetor.

As quatro equações de Maxwell podem ser condensadas em apenas duas. Para que isso seja feito é necessário apresentar a forma como os potenciais eletromagnéticos definem os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Em unidades do sistema internacional se tornam

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \tag{67}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{68}$$

Vale ressaltar que as duas equações anteriores estão de acordo com as equações de Maxwell (1) - (4). É possível perceber realizando operações como testes.

Aplicando-se o divergente na equação para o campo magnético percebe-se que a equação (2) é obtida, pois a Análise Vetorial nos garante que o divergente de todo rotacional de um campo vetorial é nulo. Fazendo o mesmo procedimento para o campo elétrico, obtém-se

$$-\vec{\nabla}^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{69}$$

E ao utilizar o que é conhecido por *gauge de Lorentz*, ou seja

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \tag{70}$$

resgata-se a equação de onda - com fonte - para o campo ϕ

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{71}$$

No entanto, ao aplicar o rotacional na equação que define o campo $\vec{B}$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\
&= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A} \\
&= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\phi) - \vec{\nabla}^2\vec{A} \\
&= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{E}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{A} \\
&= \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\vec{A} \\
&= \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{J},
\end{aligned} \tag{72}$$

já que

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\vec{A} = \mu_0\vec{J} \tag{73}$$

é a equação de onda para o potencial vetor eletromagnético $\vec{A}$, cuja fonte é a densidade de corrente elétrica.

E para obter a última equação de Maxwell, basta aplicar o rotacional na equação que define o campo $\vec{E}$, isto é

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{\nabla} \times \left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},\end{aligned} \tag{74}$$

pois o rotacional de todo gradiente de um campo escalar é nulo.

Considerando que o quadrivetor potencial eletromagnético A_μ tem a forma

$$A_\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right) \tag{75}$$

as duas equações de onda apresentadas para os potenciais vetor e escalar (71) e (73) se tornam

$$\Box A^\mu = -\mu_0 J^\mu, \tag{76}$$

pois $\Box$ é o operador d'Alambertiano, ou seja $\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu$.

A densidade de corrente também pode ser escrita na mesma notação

$$J_\mu = (c\rho, \vec{J}), \tag{77}$$

que pelas mesmas razões, possui uma equação de conservação que é a equação da continuidade (5) definida por $\partial_\mu J^\mu = 0$.

O protagonista da notação covariante da Teoria Eletromagnética é, sem dúvidas, o quadripotencial A_μ, já que os potenciais estão inseridos em sua representação. No entanto, uma nova entidade eletromagnética surge a partir do campo A_μ, obtido através de suas derivadas, ou seja

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{78}$$

Em termos das componentes de $\vec{E}$ e $\vec{B}$, o tensor $F_{\mu\nu}$ tem a seguinte forma matricial

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{79}$$

Esta matriz é obtida a partir da definição do tensor eletromagnético em termos do quadripotencial, considerando os índices e as definições dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ em termos dos potenciais eletromagnéticos. Percebe-se que a diagonal é nula em razão da sua característica antissimétrica.

Na literatura é possível encontrar um outro tensor semelhante ao $F_{\mu\nu}$, denotado por ${}^*F_{\mu\nu}$, conhecido por tensor dual. A sua definição - conhecida também por *dual hodge* - é feita a partir do tensor de Levi-Civita da seguinte forma

$$ {}^*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,F^{\rho\sigma}. \tag{80} $$

Considerando a antissimetria existente entre os tensores e admitindo $\varepsilon_{0123} = 1$, pode-se apresentar as componentes da matriz para este novo tensor cuja forma é

$$ {}^*F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & \frac{E_z}{c} & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -\frac{E_z}{c} & 0 & \frac{E_x}{c} \\ B_z & \frac{E_y}{c} & -\frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix}. \tag{81} $$

Com um olhar atento, é possível perceber que o tensor dual tem as suas componentes alteradas a partir de uma troca entre os campos. Novamente temos a manifestação da dualidade eletromagnética. Esses dois tensores são entidades fundamentais que "moram" em dois espaços distintos. No entanto, uma vez que a dualidade eletromagnética é alcançada, os campos obtidos no novo espaço são exatamente os mesmos se comparados àqueles que eram definidos no outro. A dualidade promove uma indistinguibilidade entre os campos e entidades/grandezas elétrico-magnéticas definidas.

Para trazer à tona a vantagem de usar esta notação covariante para a Teoria Eletromagnética, faz-se necessário discutir como as equações de Maxwell podem ser obtidas sob uma nova perspectiva.

É sabido que, para estudar qualquer sistema físico, é comum que se estabeleça uma equação envolvendo energias do sistema que é conhecido por lagrangiana. E uma vez que se conhece tal equação, as equações de movimento para os campos envolvidos podem ser obtidas através da Equação de Euler-Lagrange (E.L.).

O Eletromagnetismo Clássico e usual possui uma lagrangiana bem conhecida que gera as equações de Maxwell escritas na notação covariante. É necessário lembrar que os campos elétrico e magnético não aparecem explicitamente na ação. Eles são descritos através dos potenciais eletromagnéticos $\vec{A}$ e ϕ que tem sua notação generalizada, já que a notação covariante fornece um caráter relativista para a abordagem. Os termos presentes na ação são sempre invariantes de Lorentz, o que ajuda a justificar o uso da notação covariante. Para o caso do eletromagnetismo, o lagrangiano mais simples que fornecerá as equações de Maxwell pode ser expresso por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\ F_{\mu\nu}\ F^{\mu\nu}. \tag{82}$$

Esta é a forma perfeita de escrever o vácuo, já que as fontes estão ausentes. Aplicando E.L. encontra-se

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \tag{83}$$

No entanto, esta equação apenas gera duas das quatro equações de Maxwell. Para obter as outras duas é necessário utilizar uma identidade bastante conhecida na literatura que surge, basicamente, por conta da antissimetria entre os índices de $F_{\mu\nu}$. Tal identidade é conhecida por Identidade de Bianchi e é definida com o tensor dual, assim

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0. \tag{84}$$

Também é comum apresentá-la como

$$\partial_\mu\ {}^*F^{\mu\nu} = 0, \tag{85}$$

já que o tensor de Levi-Civita irá garantir que o movimento cíclico dos índices não irá contrariar a antissimetria de $F_{\mu\nu}$.

Logo, as equações (83) e (85) são as quatro equações de Maxwell escritas na notação covariante para o caso do vácuo. Escritas em componentes, elas resgatariam o conjunto de equações (16) - (19), sendo a (83) a responsável por gerar a Lei de Gauss e a Lei de Ampère-Maxwell.

O único campo presente - não de forma explícita - no lagrangiano $\mathcal{L}$ é o campo A_μ, representado em (75).

A pergunta que deve ser feita é: o que ocorre se acaso neste sistema do vácuo for incluído uma carga elétrica? Ou ainda que se inclua um conjunto de cargas; qual modificação o lagrangiano teria?

Existe um princípio conhecido na literatura por Acoplamento Mínimo que basicamente descreve a forma como novos termos serão inclusos para representar novas partículas que irão compor o sistema.

As cargas elétricas - ou fontes - serão acrescidas ao sistema através do quadrivetor corrente elétrica representado por J_μ. O invariante de Lorentz que demonstra como a interação da luz com a matéria irá ocorrer tem a forma $A_\mu J^\mu$. O novo lagrangiano modificado

$$\mathcal{L}_{\mathcal{M}} = -\frac{1}{4}\ F_{\mu\nu}\ F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu \tag{86}$$

é conhecido por lagrangiano de Maxwell, por gerar as equações que são facilmente encontradas na literatura.

Aplicando E.L., encontra-se

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu. \tag{87}$$

Como a identidade de Bianchi independe da forma do lagrangiano, duas outras equações se manterão invariantes. Em componentes, o novo par de equações gerariam as equações de Maxwell já apresentadas no grupo de equações (1) - (4). É importante lembrar que ao aplicar uma nova derivada na equação, verifica-se que o lado esquerdo se anula por conta da simetria entre as derivadas e antissimetria do tensor eletromagnético. No entanto, isso gera a equação da continuidade, ou seja, $\partial_\mu J^\mu = 0$.

Percebe-se que, para definir o lagrangiano, é necessário conhecer a forma como todas as partículas envolvidas no sistema interagem além de respeitar a invariância de Lorentz para todos os termos. Algebricamente, pode-se provar que se um termo incluso no lagrangiano for um termo de derivada total - conhecido por termo de borda - as equações de movimento (encontradas por E.L.) não sofrerão quaisquer alterações.

A notação covariante também pode auxiliar no processo de inclusão do monopolo magnético nas equações de Maxwell. Incluir monopolos magnéticos da forma mais comum significa violar a identidade de Bianchi para escrever

$$\partial_\mu\, {}^*\mathcal{F}^{\mu\nu} = J^\nu_m. \tag{88}$$

Isto significa dizer que o tensor eletromagnético não pode ser mais escrito sob a forma (78). Este formalismo matemático desenvolvido por Dirac é conhecido por *Corda de Dirac* e pode ser expresso através da relação

$$F_{\mu\nu} \quad \rightarrow \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \, {}^*\Sigma_{\mu\nu}, \tag{89}$$

em que Σ representa a superfície de mundo cuja borda é a linha de mundo por onde o monopolo se localiza. Basicamente o formalismo é compreendido melhor com o uso das *branas*, cujos índices dos termos nas equações poderiam representar a dimensão dos mesmos neste espaço. Cabe ressaltar que a Corda de Dirac é uma entidade matemática e, portanto, não representa fisicamente qualquer quantidade. Isto é, "movimentar" tal corda não consome energia, por exemplo.

Alguns efeitos interessantes surgem através deste formalismo. É sabido que a idealização do monopolo magnético se assemelha à carga elétrica, isto é, define-se como uma carga que produz um campo $\vec{B}$ radial. No entanto, conforme é previsto por uma das equações de Maxwell usuais, as linhas de campo magnético são fechadas e, portanto, ao idealizar o monopolo como uma carga pontual, uma descontinuidade surge no formalismo.

Tal descontinuidade acaba por definir a Corda de Dirac que basicamente está localizada no conjunto de pontos em que há uma dificuldade de se definir $\vec{B}$. A corda, portanto, cria um tubo de fluxo quando dois monopolos estão em regime de confinamento. Desta forma, movimentar a corda custa energia. Por conta disso, é comum dizer que, dentro destas condições, a Corda de Dirac se tornou física.

O lagrangiano modificado com a inclusão de monopolos tem a forma

$$\mathcal{L}_{\mathcal{M}} = -\frac{1}{4}\, \mathcal{F}_{\mu\nu}\, \mathcal{F}^{\mu\nu} + A_{\mu} J^{\mu}. \tag{90}$$

O fato curioso com esta abordagem é salientar que o termo que representa a carga elétrica permanece explícito, enquanto o monopolo magnético se mantém escondido dentro da nova definição do tensor eletromagnético $\mathcal{F}$.

Utilizando as definições anteriores, a violação da Identidade de Bianchi permite encontrar a seguinte igualdade

$$\partial_{\mu}\, {}^{*}\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial_{\mu}\, \Sigma^{\mu\nu} = J^{\nu}_{m}. \tag{91}$$

2 ELETRODINÂMICA AXIÔNICA

A base do presente estudo pode ser encontrada no artigo (RODRIGUES, 2018) publicado na *Physical Review Letters*. A proposta é investigar como a dualidade eletromagnética pode ser definida e descrita para o sistema caracterizado pelo plasma de Meyer-Vernet. Além disso, verificar se é possível encontrar uma ação local - ou lagrangiano - que descreva completamente todo o sistema.

2.1 Aspectos introdutórios

O plasma de Nicole Meyer-Vernet já foi estudado em uma generalização mais simples. No artigo original, ela descreve um sistema de cargas elétricas e magnéticas regidas por uma força de Lorentz generalizada para as duas naturezas de cargas. Com o objetivo de simplificar a abordagem, é feita uma aproximação conhecida por *cold-plasma* - ou plasma frio - que despreza todos os termos não-lineares. A primeira etapa do trabalho procurou incluir tais termos, incluindo também o termo θ (rotulado por axiônico), apresentado na seção anterior. No entanto, este termo ainda não poderia representar o áxion como é encontrado na literatura, já que o mesmo era considerado como uma constante.

No presente trabalho, com a tentativa de estender ainda mais o estudo, o áxion será incluso no plasma fazendo com que o termo θ se torne $\theta \equiv \theta(\vec{x}, t)$, isto é, de fato o áxion estará presente, pois θ será encarado como um campo. Esta consideração muda completamente a abordagem feita no artigo de Meyer-Vernet e na generalização inicial que já foi feita (ALEIXO, 2016). Alguns passos estão contidos no APÊNDICE A.

No artigo (RODRIGUES, 2018), a dualidade eletromagnética envolvendo cargas elétricas e magnéticas foi feita de forma forçada. Embora um *ansatz* pudesse esclarecer perfeitamente como tudo seria definido, alguns termos sobressaíram aos olhos e todo o passo de investigação gerou o que será apresentado.

Antes de focar nestas etapas, primeiro faz-se necessário discutir como seria incluir monopolos magnéticos no lagrangiano de Maxwell $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ para depois pensar onde o áxion seria definido.

Os monopolos magnéticos poderiam ser encarados como se fossem cargas elétricas, que produziriam também um campo radial. O princípio utilizado que defenderá a sua inclusão é o da simetria. Já foi apresentado e é fácil notar que as equações de Maxwell usuais não são simétricas. De forma rápida, incluir monopolos significa reescrever as equações de Maxwell sob a forma (35) - (38). No entanto, da seção anterior, pode-se argumentar que as equações que foram modificadas em razão da inclusão dos monopolos magnéticos foram as mesmas obtidas através da Identidade de Bianchi, isto é, na notação covariante significa dizer: $\partial_\mu\ {}^*F^{\mu\nu} \neq 0$. Conclui-se que a inclusão de monopolos - desta forma - viola, portanto, a identidade de Bianchi. A pergunta que pode ser feita é: como ficam as duas equações de Maxwell na forma covariante? Pensando em simetria, fica fácil expor

$$\partial_\mu\ \mathcal{F}^{\mu\nu} = J_e^\nu \tag{92}$$
$$\partial_\mu\ {}^*\mathcal{F}^{\mu\nu} = J_m^\nu. \tag{93}$$

Com esta descrição fica claro que a inclusão de monopolos magnéticos se deu através da Corda de Dirac, isto é, a definição do tensor eletromagnético foi modificada.

A dificuldade começa com a inclusão do áxion, agora encarado como um campo. Embora a Eletrodinâmica Axiônica tenha as suas equações de forma bem definida (WILCZEK, 1987), parece que não é tão simples pensar em incluir monopolos e áxions no sistema e expor uma ação local que mantenha a dualidade eletromagnética.

Para o caso mais simples sem os monopolos, o par de equações que facilmente seria encontrado pode ser expresso por

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - \partial_\mu(\theta\ {}^*F^{\mu\nu}) = \mu_0 J_e^\nu; \tag{94}$$
$$\partial_\mu\ {}^*F^{\mu\nu} = 0. \tag{95}$$

O termo novo que surgiu contendo o áxion é obtido a partir de um termo - invariante de Lorentz - presente na ação generalizada com áxions, já que no lagrangiano, o termo do áxion possui a forma

$$\mathcal{L}_\theta\ \sim\ \theta F_{\mu\nu}\ {}^*F^{\mu\nu}. \tag{96}$$

Esta é a forma como o áxion se acopla, como encontramos na literatura (TIWARI,). Aplicando E.L. para o campo A_μ fica fácil perceber como o tal termo novo surge.

Nesta etapa surgem duas ponderações. A primeira seria perceber que o lagrangiano tem um novo campo - o áxion - e, portanto, teria uma equação de movimento associada a ele. E a segunda - um pouco mais interessante - envolveria a forma de como a dualidade eletromagnética seria estabelecida, ou seja, como violar a identidade de Bianchi tendo cargas elétricas, magnéticas e o áxion e manter a coesão das equações como o caso usual possuía?!

Para responder a primeira ponderação, o próprio artigo (RODRIGUES, 2018) fornece um guia para este questionamento. O áxion, sendo encarado como um campo, terá uma equação que descreverá a sua dinâmica. Como é um campo que eventualmente terá uma massa associada, a equação que descreverá será a de Klein-Gordon (K.G.), com a forma

$$\left(\Box + \frac{m_\theta^2 c^2}{\hbar}\right)\theta \ \sim \ F_{\mu\nu}\ {}^*F^{\mu\nu}, \tag{97}$$

sendo $\Box$ o operador d'Alambertiano definido por

$$\Box \equiv \partial^2 \equiv \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \nabla^2. \tag{98}$$

Como já foi amplamente discutido, as equações de movimento são obtidas a partir da aplicação das equações de E.L. em um lagrangiano. Da Eletrodinâmica Axiônica usual, o termo $F_{\mu\nu}\ {}^*F^{\mu\nu}$ é aquele responsável por incluir o áxion. Vale ressaltar que se o áxion for na verdade uma constante (como era o termo θ anteriormente), as equações de movimento permanecem invariantes se acaso o termo incluso no lagrangiano for um "termo de borda", já mencionado.

Para que a dualidade eletromagnética seja estabelecida, parece ser necessário violar a identidade de Bianchi com a tentativa de incluir cargas e correntes magnéticas em um sistema que também terá a presença do áxion. Neste ponto, (RODRIGUES, 2018) sugere uma dualidade que foi apresentada de forma forçada, como um *ansatz*. Isso gerou uma série de questionamentos que visam compreender como todo esse processo ocorre. No artigo, pode-se encontrar o seguinte *ansatz* para tentar impor a dualidade

$$\partial_\mu\ {}^*F^{\mu\nu} + \partial_\mu(\theta F^{\mu\nu}) = \mu_0 J_m^\nu. \tag{99}$$

No entanto, quando a equação anterior e a (94) são consideradas de forma simultânea, pode-se perguntar qual é o formato do lagrangiano que gera o par de equações. Ou seja, qual será a ação local que descreverá o conjunto de equações? Cabe ressaltar que a equação de K.G. ainda precisa ser respeitada, já que o áxion agora é um campo.

2.2 Discussão sobre consistência

Esta é a primeira etapa da investigação que envolve a dualidade eletromagnética. Antes do processo ser iniciado faz-se necessário apresentar as diferenças entre as abordagens do presente estudo e do artigo original (RODRIGUES, 2018). Ele apresenta o sistema que será posto em cheque nas análises seguintes. Nele o áxion é visto como um campo e, portanto, há uma equação de K.G. associada ao mesmo que descreverá a sua dinâmica. No entanto, não há uma definição de ação efetiva para a dualidade que existe neste sistema e isto foi o principal objeto de motivação para tal estudo.

Paralelamente à isso, um outro artigo foi encontrado durante o processo. Trata-se do trabalho (MIGNACO, 2001), que buscava descrever e entender aspectos do eletromagnetismo pós-Dirac, já que os monopolos magnéticos também são inseridos em seu formalismo. Uma das referências citadas neste artigo é (SINGLETON, 1995), que foi uma bússola bastante importante para compreender todo o processo de dualidade. Singleton, em seu artigo, propõe uma descrição interessante de um sistema que não possui áxions e, portanto, não possui uma equação de K.G. associada. Contudo, há uma discussão com a definição de uma ação para o sistema com monopolo e corrente magnéticos. A inclusão e descrição de tais elementos são feitas por pares de potenciais eletromagnéticos, ou seja, trata-se de uma formulação do eletromagnetismo com dois potenciais, diferentemente do caso usual que é feita apenas pelo A_μ. Esse tipo de técnica foi criada e amplamente discutida por Zwanziger em seu trabalho sobre uma teoria quântica para cargas elétricas e magnéticas (ZWANZIGER, 1971).

Inspirado nestes trabalhos recém citados, espera-se apresentar posteriormente uma formulação para compreender como será definida a dualidade eletromagnética para este sistema com cargas elétricas e magnéticas, com a presença do campo de áxion e que possua um lagrangiano bem definido e coerente com todo este modelo. Espera-se utilizar do mesmo artifício dos dois potenciais feita por Zwanziger com a proposta de manter a simetria do sistema.

O campo do áxion θ utilizado neste presente estudo é definido no artigo (RODRIGUES, 2018) pelo produto $g\varphi$, que ao considerar c igual a 1, g é uma constante de acoplamento com dimensão de inverso de massa e φ é o campo do áxion com dimensão de massa, para manter θ adimensional. Esta redefinição garantirá a correta dimensionalidade da seguinte ação

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu J_e^\mu + \frac{1}{g^2}\mathcal{L}_\theta + \mathcal{L}_{int}, \tag{100}$$

sendo

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{1}{2}\ \partial_\mu\theta\ \partial^\mu\theta - \frac{m_\theta^2}{2}\ \theta^2; \tag{101}$$

$$\mathcal{L}_{int} = -\theta\ F_{\mu\nu}\ {}^*F^{\mu\nu}, \tag{102}$$

Por E.L., pode-se encontrar as duas equações de movimento

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - \partial_\mu(\theta\ {}^*F^{\mu\nu}) = 0; \tag{103}$$

$$(-\partial^2 + m_\theta^2)\ \theta = \frac{g^2}{8}F_{\mu\nu}\ {}^*F^{\mu\nu}. \tag{104}$$

Sendo a última equação a de K.G., que descreverá toda a dinâmica para o campo do áxion.

Para estabelecer a dualidade, o artigo (RODRIGUES, 2018) a propõe de forma forçada sugerindo como *ansatz* a seguinte equação

$$\partial_\mu\,{}^*F^{\mu\nu} + \partial_\mu(\theta F^{\mu\nu}) = 0, \tag{105}$$

que irá compor com as outras três o conjunto de equações de movimento para o sistema. E é nesta etapa que os problemas de inconsistência começam a surgir, pois uma vez que a equação anterior também é considerada, o lagrangiano (100) não é mais válido. Além disso, a própria entidade eletromagnética $F_{\mu\nu}$ não terá mais a sua descrição usual em termos do campo A_μ. E como a mudança, através do *ansatz*, foi bastante significativa, nem mesmo a Corda de Dirac poderá ser sugerida em uma nova definição. Sendo assim, o sistema não possui mais uma ação. O próprio artigo cita o trabalho de (VISINELLI, 2013) que menciona que a abordagem original surgiu no artigo (SUDBERY, 1985) que utilizava-se de uma ação vetorial para o sistema. Além de não ser a proposta do presente estudo, utilizar-se de uma ação vetorial - que não está claro sobre o que significa - pode contrariar a consistência da teoria, principalmente no que se diz respeito à invariância de Lorentz. Pretende-se encontrar nesta dissertação, diferentemente, uma ação escalar com dualidade.

Aparentemente as equações (103), (104) e (105) estão coerentes e a simetria entre elas parece fornecer confiabilidade. Será mostrado que é impossível obter uma ação local utilizando o campo A_μ para descrever todo o sistema.

A discussão pode ser iniciada considerando este caso mais simples sem fontes elétricas e magnéticas no lagrangiano, ou seja, fazendo $J_e^\mu = J_m^\mu = 0$. Considerando a métrica (66), a ação para este caso tem a sua forma explícita

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\theta}{8}F_{\mu\nu}\,{}^*F^{\mu\nu} - \frac{1}{2g^2}\partial_\mu\theta\,\partial^\mu\theta - \frac{m^2}{2g^2}\theta^2 \right) \tag{106}$$

em que $F_{\mu\nu}$ e ${}^*F^{\mu\nu}$ continuam sendo definidos, respectivamente, por (78) e (80). Aplicando E.L. obtém-se

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - \partial_\mu(\theta\,{}^*F^{\mu\nu}) = 0; \tag{107}$$

$$(-\partial^2 + m^2)\theta = \frac{g^2}{8}F_{\mu\nu}\,{}^*F^{\mu\nu}. \tag{108}$$

Além destas últimas duas, ainda há uma terceira equação a ser considerada que é a Identidade de Bianchi $\partial_\mu\,{}^*F^{\mu\nu} = 0$.

As equações anteriores não expõem a dualidade eletromagnética. Para que ela seja estabelecida, pode-se assumir o procedimento realizado no artigo (RODRIGUES, 2018), ou seja, violar a Identidade de Bianchi a fim de escrever

$$\partial_\mu\,{}^*F^{\mu\nu} + \partial_\mu(\theta F^{\mu\nu}) = 0. \tag{109}$$

E a pergunta da sequência é: qual é a ação efetiva que descreve todo o sistema? Para responder tal pergunta, pode-se reescrever as equações com o auxílio de um novo campo $G_{\mu\nu}$ definido por

$$G_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu} - \theta\ {}^{*}F_{\mu\nu}, \tag{110}$$

cujo dual tem a forma

$$\begin{aligned} {}^{*}G_{\mu\nu} &= {}^{*}F_{\mu\nu} - \theta\ {}^{*}({}^{*}F_{\mu\nu}) \\ &= {}^{*}F_{\mu\nu} + \theta\ F_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{111}$$

pois

$$\begin{aligned} {}^{*}({}^{*}F_{\mu\nu}) &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{\rho\sigma\lambda\phi}F_{\lambda\phi}\right) \\ &= \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\rho\sigma\lambda\phi}F_{\lambda\phi} \\ &= \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\rho\sigma\lambda\phi}F^{\lambda\phi} \\ &= \frac{1}{4}[-2(\delta^{\mu}_{\lambda}\delta^{\nu}_{\phi} - \delta^{\mu}_{\phi}\delta^{\nu}_{\lambda})]\ F^{\lambda\phi} \\ &= -\frac{1}{2}(F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) \\ &= -\frac{1}{2}(2F^{\mu\nu}) \\ &= -F^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{112}$$

As contrações dos tensores Levi-Civita podem ser encontradas em (NETO, 2010). As equações de movimento podem ser reescritas em termos de $G_{\mu\nu}$ sob a forma

$$\begin{aligned} &\partial_\mu F^{\mu\nu} - \partial_\mu(\theta^{*}F^{\mu\nu}) = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_\mu(F^{\mu\nu} - \theta^{*}F^{\mu\nu}) = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_\mu G^{\mu\nu} = 0; \\ &\partial_\mu\ {}^{*}F^{\mu\nu} + \partial_\mu(\theta F^{\mu\nu}) = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_\mu({}^{*}F^{\mu\nu} + \theta F^{\mu\nu}) = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_\mu\ {}^{*}G^{\mu\nu} = 0; \\ &(-\partial^2 + m^2)\theta = \frac{g^2}{8}\frac{1}{(1+\theta^2)^2}\left(-2\theta G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + (1-\theta^2)\ G_{\mu\nu}\ {}^{*}G^{\mu\nu}\right), \end{aligned} \tag{113}$$

sendo esta última obtida a partir das definições de $G_{\mu\nu}$ e ${}^{*}G_{\mu\nu}$ aplicados na equação de K.G. Isto é, fazendo "(110) + θ (111)", tem-se

$$F_{\mu\nu} = \frac{G_{\mu\nu} + \theta^{*}G_{\mu\nu}}{(1+\theta^2)}. \tag{114}$$

De forma análoga, fazendo “(111) + θ (110)”, tem-se

$$^*F_{\mu\nu} = \frac{^*G_{\mu\nu} - \theta G_{\mu\nu}}{(1+\theta^2)}. \tag{115}$$

Substituindo estas últimas equações na equação de K.G obtém-se a terceira linha de (113).

Vale ressaltar que a violação da Identidade de Bianchi com a tentativa de simetrização/dualidade faz com que $F_{\mu\nu} \neq \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

A segunda linha de (113) consegue fornecer a seguinte forma

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu. \tag{116}$$

Nesta etapa pode-se apresentar uma forma geral para um lagrangiano que contemple os termos que precisam ser obtidos por E.L. para cada campo. Sendo assim, a sua forma, considerando o “novo” campo A'_μ deve ser próxima de

$$\mathcal{L}_{A'} \sim f(\theta) G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + g(\theta) G_{\mu\nu}\, ^*G^{\mu\nu} \tag{117}$$

em que $f(\theta)$ e $g(\theta)$ são funções arbitrárias e gerais que dependem explicitamente do áxion. Cabe ressaltar que outras combinações entre os tensores não gerariam termos novos.

Aplicando E.L. em $\mathcal{L}_{A'}$, obtém-se

$$4f'(\theta)(\partial_\mu \theta) G^{\mu\nu} + 8g'(\theta)(\partial_\mu\theta)\, ^*G^{\mu\nu} = 0 \tag{118}$$

com $f'(\theta) = \frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta}$ e $g'(\theta) = \frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta}$, considerando as duas primeiras linhas de (113). A outra forma de escrever a equação anterior é

$$[2(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}) f'(\theta)\partial_\mu\theta + 4\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} g'(\theta)\partial_\mu\theta] G_{\rho\sigma} = 0. \tag{119}$$

Como o segundo termo da equação anterior é antissimétrico por conta do tensor de Levi-Civita, contraindo com um novo $\eta_{\nu\sigma}$ tem-se

$$f'(\theta)\ \partial^\rho\theta\ G_{\rho\sigma} = 0, \tag{120}$$

pois $\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = 4$. Utilizando a equação anterior em (118), obtém-se

$$g'(\theta)(\partial_\mu\theta)\, ^*G^{\mu\nu} = 0. \tag{121}$$

Comparando os termos de (117) com o lado direito da terceira equação de (113), percebe-se que $f'(\theta)$ e $g'(\theta)$ não podem ser nulos. Sendo assim,

$$(\partial_\mu \theta)\ G^{\mu\nu} = 0; \tag{122}$$
$$(\partial_\mu \theta)\ {}^*G^{\mu\nu} = 0. \tag{123}$$

E para que isto ocorra ou $\partial_\mu \theta = 0$ e/ou $G^{\mu\nu} = 0$. Pode-se considerar $\partial_\mu \theta = P_\mu$ para expor

$$P_\mu G^{\mu\nu} = 0. \tag{124}$$

O intuito de reescrever sob a forma anterior é para utilizar tal vetor P_μ como uma forma de projetar as componentes de $G^{\mu\nu}$ na mesma direção. Tal equação fornece seis condições independentes e força as componentes de $G^{\mu\nu}$ a se anularem. Como há apenas seis componentes independentes em $G_{\mu\nu}$, pode-se dizer que $G_{\mu\nu} = 0$. E sendo assim, pode-se concluir que não há uma ação local em $4D$ que possa fornecer todas as equações de movimento expostas anteriormente.

Como este sistema é o mesmo do artigo (RODRIGUES, 2018) sem cargas elétricas, fica claro perceber que nesta ordem de derivada e usando um só campo de Gauge não é possível expor uma ação para o sistema (para entender como seriam os termos de ordem superior veja o artigo (RAFFELT G., 1988)). Vale ressaltar que a carga nula é um tipo de carga e se a inconsistência está presente em razão desta consideração, certamente também estará naquelas que considerarem cargas não-nulas.

E a pergunta imediata que aparece é: será que existe alguma formulação para uma ação que considere a dualidade eletromagnética existente entre as cargas elétricas e magnética, e que respeite a dinâmica do campo de áxion descrita pela equação de K.G.?

O fato de não ter uma ação, não prova que o sistema é inconsistente. No entanto, foi possível demonstrar uma inconsistência que surgiu pelas próprias equações de Maxwell do artigo (RODRIGUES, 2018). Adicionando as fontes, elas podem ser escritas explicitamente por

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} + \theta \vec{B}) = \rho; \tag{125}$$
$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{B} - \theta \vec{E}) = 0; \tag{126}$$
$$\vec{\nabla} \times (\vec{E} + \theta \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B} - \theta \vec{E}); \tag{127}$$
$$\vec{\nabla} \times (\vec{B} - \theta \vec{E}) = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} + \theta \vec{B}) + \vec{J}. \tag{128}$$

É possível perceber que há algumas alterações em relação à forma original das equações expostas no artigo (RODRIGUES, 2018), considerando a adimensionalidade do campo do áxion θ.

Avançando na discussão, o artigo sugere um caso específico para o sistema que busca descrever. O áxion é considerado um campo e possui a sua dinâmica definida pela equação de K.G., isto é, o termo $\vec{E}\cdot\vec{B}$ proporcionará a evolução de tal campo. Admite-se, pelo artigo, que o campo magnético $\vec{B}$ é forte e homogêneo apenas na direção z, ou seja, $\vec{B} = B_0\ \hat{e}_z$. Além disso, o próprio artigo apresenta uma forma específica para o áxion que pode ser expressa por

$$\theta \sim e^{ikz - i\omega t}. \tag{129}$$

É sabido que as equações de Maxwell precisam ser válidas independentemente se há ou não fontes externas. Considerando, portanto, o caso mais simples para o artigo (RODRIGUES, 2018) com $\rho = 0$ e $\vec{J} = \vec{0}$, tem-se

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -(\vec{\nabla}\theta)\cdot\vec{B}; \tag{130}$$

$$(\vec{\nabla}\theta)\cdot\vec{E} + \theta(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = 0; \tag{131}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + (\vec{\nabla}\theta)\times\vec{B} = \frac{\partial\theta}{\partial t}\vec{E} + \theta\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}; \tag{132}$$

$$-(\vec{\nabla}\theta)\times\vec{E} - \theta(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial t}\vec{B}. \tag{133}$$

Utilizando as duas primeiras equações, pode-se obter

$$(\vec{\nabla}\theta)\cdot\vec{E} + \theta[-(\vec{\nabla}\theta)\cdot\vec{B}] = 0;$$

$$\Rightarrow (\vec{\nabla}\theta)\cdot(\vec{E} - \theta\vec{B}) = 0. \tag{134}$$

Considerando o caso mais geral em que $\vec{\nabla}\theta$ não seja ortogonal à $\vec{E} - \theta\vec{B}$, então

$$\vec{E} = \theta\vec{B}. \tag{135}$$

Utilizando esta última equação na lei de Gauss do artigo - equação (125) -, já que a densidade de carga está sendo considerada como nula, tem-se

$$\vec{\nabla}\cdot(\theta\vec{B}) = 0. \tag{136}$$

E tal equação confirma que $\vec{\nabla}\theta$ é ortogonal ao campo $\vec{B}$, isto é, $\vec{\nabla}\theta$ não tem componente em z, o que contradiz a equação (129), que afirma que o campo do áxion depende de z, como foi proposto pelo próprio artigo. Mesmo para este caso mais simples, esta é uma forma de demonstrar uma possível inconsistência na tentativa de se estabelecer a dualidade eletromagnética. Esta foi uma das razões pelas quais se motivou a fazer tal estudo.

2.3 Dois potenciais

Investigando na literatura foi possível se deparar com o artigo de (MIGNACO, 2001) que cita o artigo de (SINGLETON, 1995) em que o mesmo usa uma abordagem criada por Zwanziger (ZWANZIGER, 1971) com a qual busca descrever os campos através de dois potenciais. No entanto, neste trabalho, não foi considerado o áxion nem mesmo como uma constante.

No trabalho de Singleton, a dualidade é descrita de forma clara e não surge como imposição ou *ansatz*. Antes de propor qualquer discussão sobre a inclusão de áxions, é necessário expor de forma sintetizada a abordagem do Singleton que servirá como uma motivação para alcançar o objetivo do presente estudo.

Singleton começa a abordagem expondo as quatro equações de Maxwell simetrizadas como já foi feito anteriormente no conjunto (35) - (38). Segue apresentando uma discussão sobre as transformações de dualidade envolvendo rotações no espaço definido pelas matrizes pertencentes ao grupo $SO(2)$, como feito na seção 1.2 para então introduzir o novo potencial C_μ que auxiliará o A_μ por toda a discussão.

Os campos elétrico e magnético são descritos pelo par de potenciais e isso faz com que exista um acoplamento entre eles. Isto é,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi_e - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{C}; \tag{137}$$

$$\vec{B} = -\vec{\nabla}\phi_m - \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{A}. \tag{138}$$

A discussão segue mencionando sobre os aspectos envolvendo simetrias de gauge, equações de onda e de continuidade similares ao que já foi apresentado. A parte de maior relevância para esta presente abordagem é a apresentação das definições dos campos através da notação covariante, assim

$$E_i = F^{i0} - {}^*G^{i0}; \tag{139}$$

$$B_i = G^{i0} + {}^*F^{i0}, \tag{140}$$

em que

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu; \tag{141}$$

$$G^{\mu\nu} = \partial^\mu C^\nu - \partial^\nu C^\mu \tag{142}$$

com os duais possuindo as definições usuais

$$ {}^{*}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}; \tag{143} $$

$$ {}^{*}G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}G_{\rho\sigma}. \tag{144} $$

E em seguida apresenta as equações de Maxwell para o sistema escrito em notação covariante

$$ \partial_\mu F^{\mu\nu} = J_e^\nu; \tag{145} $$

$$ \partial_\mu G^{\mu\nu} = J_m^\nu; \tag{146} $$

$$ \partial_\mu\ {}^{*}F^{\mu\nu} = 0; \tag{147} $$

$$ \partial_\mu\ {}^{*}G^{\mu\nu} = 0. \tag{148} $$

E como última parte relevante para a presente discussão, Singleton expõe o lagrangiano para o seu sistema com a forma

$$ \mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_e^\mu A_\mu - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} - J_m^\mu C_\mu, \tag{149} $$

e reforça que termos como $F_{\mu\nu}\ {}^{*}G^{\mu\nu}$, ${}^{*}F_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$, ${}^{*}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ e ${}^{*}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$ não contribuem com termos extras nas equações de movimento, já que são termos de borda, ou seja, são diferenciais totais e se anulariam por métodos de integração.

Aqui cabe enfatizar que no trabalho do Singleton não há áxion, ou seja, não existe equação de K.G. e, portanto, expor uma ação (ou lagrangiano) se torna mais simples.

Observe que seguem dessas equações

$$ \partial_i(F^{i0} - {}^{*}G^{i0}) = J_e^0; \tag{150} $$

$$ \partial_i(G^{i0} + {}^{*}F^{i0}) = J_m^0. \tag{151} $$

que ilustram que

$$ \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho_e; \tag{152} $$

$$ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \rho_m. \tag{153} $$

Nesta etapa da discussão, é importante lembrar que o objetivo é encontrar um formalismo que descreva o sistema com áxions e cargas elétricas e magnéticas além de expor uma ação coerente com as equações de movimento que contemplem, principalmente, a dualidade eletromagnética. Esta última exigência é a mais fundamental e importante em todo este estudo, uma vez que sem a mesma, todo este processo poderia ser mais simples, utilizando a Corda de Dirac.

Na primeira opção de abordagem, o artigo (RODRIGUES, 2018) poderia ser utilizado desde que se inclua o formalismo de dois potenciais com a tentativa de atingir o objetivo, uma vez que o mesmo já contempla áxions. No entanto, a forma como a dualidade foi apresentada não garantiu a solidez necessária para acreditar que tal abordagem fosse a mais eficaz. A segunda opção seria utilizar o trabalho do Singleton discutido anteriormente e acrescentar áxions, já que o mesmo já possui uma ação que descreve o sistema com cargas elétricas e magnéticas, além de possuir um engenhoso formalismo com dois potenciais.

O processo de inclusão dos áxions que será feito nesta dissertação, estendendo o trabalho feito pelo Singleton, é original. A inspiração se deu na análise das usuais relações constitutivas além de um processo algébrico de tentativa e erro. Portanto, nesta próxima seção, a escolha nas definições dos campos físicos e a inclusão do campo do áxion através das relações constitutivas representam passos importantes para elucidação de todos os problemas que envolvem a dualidade eletromagnética.

2.4 Em busca da dualidade

Os passos a seguir representam algumas das mais variadas tentativas que foram feitas para tentar atingir o objetivo. Em muitos casos o problema existia em algum lugar, seja na obtenção da ação, seja na descrição dos campos ou até mesmo na equação de K.G. Parece que colocar todos estes ingredientes de forma simultânea faz com que alguma consideração impeça a existência de outra.

É sabido que o lagrangiano contém termos referentes a cada tipo de partícula inserida no sistema, mas também possui a forma com que elas interagem. E é neste ponto que toda a complexidade desse estudo mora, já que este modelo não foi amplamente discutido ainda na literatura e tais aspectos da Eletrodinâmica Axiônica ainda possuem inúmeras perguntas em aberto.

Iniciou-se esta tentativa montando as equações de Maxwell na forma covariante com a inspiração do formato apresentado pelo Singleton. Pode-se tentar as seguintes sugestões

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - \partial_\mu(\theta\, {}^*G^{\mu\nu}) = J^\nu_e; \tag{154}$$

$$\partial_\mu(\theta G^{\mu\nu}) + \partial_\mu\, {}^*F^{\mu\nu} = J^\nu_m, \tag{155}$$

sendo

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; \tag{156}$$

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu. \tag{157}$$

Os tensores duais $^*F_{\mu\nu}$ e $^*G_{\mu\nu}$ são definidos por

$$^*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}; \tag{158}$$

$$^*G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}G^{\rho\sigma}. \tag{159}$$

E os campos elétrico e magnético serão definidos por

$$E^i = F^{i0} - \theta\ ^*G^{i0}; \tag{160}$$

$$B^i = \theta\ G^{i0} +\ ^*F^{i0}, \tag{161}$$

que escritos em componentes são expressos por

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi_e - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \theta\ \vec{\nabla}\times\vec{C}; \tag{162}$$

$$\vec{B} = -\theta\ \vec{\nabla}\phi_m - \theta\ \frac{\partial\vec{C}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times\vec{A}. \tag{163}$$

A primeira dúvida que pode surgir é se (154) e (155) descreve perfeitamente as equações de Maxwell e sob qual forma. Utilizando a primeira, tem-se para $\nu = 0$

$$\begin{aligned}
&\partial_0 F^{00} + \partial_i F^{i0} - \partial_0(\theta\ ^*G^{00}) - \partial_i(\theta\ ^*G^{i0}) = J_e^0 \\
&\Rightarrow \partial_i(F^{i0} - \theta\ ^*G^{i0}) = J_e^0 \\
&\Rightarrow \partial_i E^i = J_e^0 \\
&\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho_e.
\end{aligned} \tag{164}$$

E para $\nu = i$, tem-se

$$\begin{aligned}
&\partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} - \partial_0(\theta\ ^*G^{0i}) - \partial_j(\theta\ ^*G^{ji}) = J_e^i \\
&\Rightarrow \partial_0(F^{0i} - \theta\ ^*G^{0i}) + \partial_j(F^{ji} - \theta\ ^*G^{ji}) = J_e^i \\
&\Rightarrow \partial_0(-E^i) + \partial_j\left(\partial^j A^i - \partial^i A^j - \frac{\theta}{2}\ \varepsilon^{ji0k}\ (\partial_0 C_k - \partial_k C_0)\right) = J_e^i \\
&\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{J}_e.
\end{aligned} \tag{165}$$

Analogamente, fazendo o mesmo processo com a segunda equação, tem-se para

$\nu = 0$

$$\partial_i(\theta\ {}^*G^{i0}) + \partial_i\ {}^*F^{i0} = J^0_m$$
$$\Rightarrow \partial_i(\theta G^{i0} +\ {}^*F^{i0}) = J^0_m$$
$$\Rightarrow \partial_i B^i = J^0_m \tag{166}$$
$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \rho_m. \tag{167}$$

E para $\nu = i$, obtem-se

$$\partial_0(\theta\ G^{0i}) + \partial_j(\theta\ G^{ji}) + \partial_0\ {}^*F^{0i} + \partial_j\ {}^*F^{ji} = J^i_m$$
$$\Rightarrow \partial_0(\theta\ G^{0i} +\ {}^*F^{0i}) + \partial_j(\theta\ G^{ji} +\ {}^*F^{ji}) = J^i_m$$
$$\Rightarrow \partial_0 B^i + \partial_j\left(\theta(\partial^j C^i - \partial^i C^j) + \frac{1}{2}\ \varepsilon^{ji0k}\ (\partial_0 A_k - \partial_k A_0)\right) = J^i_m$$
$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \vec{J}_m. \tag{168}$$

Desta forma é possível verificar que as definições consideradas resgatam as equações de Maxwell na sua forma usual considerando, é claro, a simetrização das mesmas com a inclusão das fontes magnéticas.

Como o campo de áxion está presente há uma equação que define a sua dinâmica que é a equação de K.G. Usualmente, o termo que aparece na parte não-homogênea é proporcional ao termo $\vec{E}\cdot\vec{B}$. Pode-se realizar o produto $\vec{E}\cdot\vec{B}$ com as definições expostas anteriormente com o intuito de enxergar quais combinações de $F_{\mu\nu}$ e ${}^*F_{\mu\nu}$ forneceriam tais termos.

Usando (162) e (163), o produto se torna

$$\begin{aligned}\vec{E}\cdot\vec{B} &= \left(-\vec{\nabla}\phi_e - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \theta\ \vec{\nabla}\times\vec{C}\right)\cdot\left(-\theta\ \vec{\nabla}\phi_m - \theta\ \frac{\partial\vec{C}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\\ &= \theta\vec{\nabla}\phi_e\cdot\vec{\nabla}\phi_m + \theta\vec{\nabla}\phi_e\cdot\frac{\partial\vec{C}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi_e\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + \theta\vec{\nabla}\phi_m\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\\ &+ \theta\ \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\vec{C}}{\partial t} - (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \theta^2\vec{\nabla}\phi_m\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{C})\\ &+ \theta^2\frac{\partial\vec{C}}{\partial t}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{C} - \theta(\vec{\nabla}\times\vec{C})\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})\end{aligned} \tag{169}$$

O resultado do produto depende de θ explicitamente. Logo no termo usual $F\ {}^*F$ - ou ainda no $F\ {}^*G$ - não irá conter o áxion e, portanto, não produzirá $\vec{E}\cdot\vec{B}$, como se espera.

Para se aproximar ainda mais do termo correto, pode-se propor o produto com outra forma, agora usando as equações (160) e (161) assim

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = (F_{i0} - \theta\ {}^*G_{i0}) \cdot (\theta G^{i0} +\ {}^*F^{i0}) \tag{170}$$
$$= F_{i0}\ \theta G^{i0} + F_{i0}\ {}^*F^{i0} - \theta^2\ {}^*G_{i0} G^{i0} - \theta\ {}^*G_{i0}\ {}^*F^{i0}$$
$$= F_{i0}\ {}^*F^{i0} + \theta(F_{i0} G^{i0} -\ {}^*G_{i0}\ {}^*F^{i0} - \theta\ {}^*G_{i0} G^{i0}). \tag{171}$$

que generalizando seria

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = F_{\mu\nu}\ {}^*F^{\mu\nu} + \theta(F_{\mu\nu} G^{\mu\nu} -\ {}^*G_{\mu\nu}\ {}^*F^{\mu\nu} - \theta\ {}^*G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}). \tag{172}$$

A expressão anterior estaria do lado direito da equação de K.G., ou seja

$$(\Box + m_\theta^2)\ \theta \ \sim\ F_{\mu\nu}\ {}^*F^{\mu\nu} + \theta(F_{\mu\nu} G^{\mu\nu} -\ {}^*G_{\mu\nu}\ {}^*F^{\mu\nu} - \theta\ {}^*G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) \tag{173}$$

Utilizando todas as condições apresentadas e discutidas anteriormente, pode-se investigar se é possível encontrar uma ação que gere também este termo. Se acaso for possível, o objetivo terá sido alcançado, uma vez que a dualidade eletromagnética para o sistema já estará estabelecida.

Alguns termos do lagrangiano são fáceis de serem sugeridos, no entanto outros podem tornar o processo mais demorado. Evitando testes via *ansatz*, pode-se propor o lagrangiano com todos os termos já sabidos incluindo uma função arbitrária e bem geral f que auxiliará no cálculo que comprovará se é possível equacionar todas as exigências.

O lagrangiano mais geral para o sistema em questão teria sua forma próximo de

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\theta}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} - A_\mu J_e^\mu - C_\mu J_m^\mu -\ {}^*F_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \theta F_{\mu\nu}\ {}^*G^{\mu\nu}$$
$$+ \frac{1}{2g^2} \partial_\mu \theta\ \partial^\mu \theta - \frac{m^2}{2g^2} \theta^2 + f. \tag{174}$$

Considerando a igualdade ${}^*F_{\mu\nu} G^{\mu\nu} = F_{\mu\nu}\ {}^*G^{\mu\nu}$, pode-se obter por E.L. a seguinte equação

$$\partial_\mu (F^{\mu\nu} - \theta\ {}^*G^{\mu\nu} +\ {}^*G^{\mu\nu} - \partial_{\partial A} f) = J_e^\mu. \tag{175}$$

De forma análoga para o campo C_μ

$$\partial_\mu (\theta G^{\mu\nu} +\ {}^*F^{\mu\nu} - \theta\ {}^*F^{\mu\nu} - \partial_{\partial C} f) = J_m^\mu. \tag{176}$$

Em que $\partial_{\partial A} f$ e $\partial_{\partial C} f$ denotam, respectivamente, a derivada da função f em relação às derivadas dos campos A_μ e C_μ. Comparando as duas últimas equações com as (154) e

(155), pode-se escrever

$$\frac{\partial f}{\partial(\partial_\alpha A_\mu)} = G^{\mu\nu} \tag{177}$$

$$\frac{\partial f}{\partial(\partial_\alpha C_\mu)} = -\theta\ {}^*F^{\mu\nu}. \tag{178}$$

No entanto, ao calcular a equação de K.G. aplicando E.L. para o campo θ tem-se

$$\left(\Box + m^2\right)\theta = g^2\left(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}\ {}^*G^{\mu\nu} + \frac{\partial f}{\partial\theta}\right). \tag{179}$$

Na equação anterior, o termo da derivada da função f deveria ajudar a resgatar todo o lado direito de (173). Em particular, note que não existe o termo $G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$ em (173), portanto $\partial_{\partial\theta} f$ deveria ser o responsável por cancelar $G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$ em (179). Sendo assim é possível expor

$$\frac{\partial f}{\partial\theta} \sim -\ G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + ... \quad \rightarrow \quad f \sim \theta\ G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + ..., \tag{180}$$

que ao comparar este último resultado com a equação (178) é possível concluir que não é possível expor uma ação para o sistema apresentado anteriormente que consiga gerar as equações de movimento desejadas.

Na proposta anterior, a inclusão de um novo campo C_μ representa muito mais do que um novo potencial. Na verdade a presença deste campo nas equações significa dizer que há um novo fóton - além daquele usual - que sofre interações de novos campos. O fóton usual sofre ação dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, enquanto o novo fóton inserido através do novo campo C_μ sofre interação através de novos campos elétrico e magnético que podem ser representados, respectivamente, por $\vec{D}$ e $\vec{F}$.

Inúmeras perguntas poderiam surgir neste momento e a principal envolveria a possível aparição deste segundo fóton, já que sendo uma partícula sem massa, deveria ser detectada, o que não ocorre. O fato desta abordagem ser um *toy model* e, portanto, o segundo fóton ser uma partícula hipotética ainda não esgota totalmente as justificativas pela sua inexistência. Singleton aborda esta discussão em seu artigo mencionando o Mecanismo de Higgs (HIGGS, 1964a), (HIGGS, 1964b), (HIGGS, 1965), ou seja, este segundo fóton dual (conhecido na literatura também por fóton magnético) ganharia massa e não poderia ser facilmente observado. Portanto, o fato de não observar este segundo fóton não desqualifica e tampouco parece destruir todo este modelo teórico.

No entanto explicar sobre a fenomenologia deste segundo fóton não garante o objetivo que é buscar a descrição teórica do sistema incluindo ação que contemple também a equação de K.G. para o áxion.

2.5 Problemas na definição dos campos

Pode ser que seja necessário repetir mais uma vez sobre as características do sistema que está sendo considerado bem como o real objetivo a ser alcançado. Trata-se do plasma de Meyer-Vernet (MEYER-VERNET, 1982) generalizado, ou seja, um plasma de cargas elétricas e magnéticas com a presença do áxion sendo encarado como de fato é: um campo. O foco está em descrever todo este sistema com o intuito de demonstrar como as equações de Maxwell são escritas, bem como expor uma ação efetiva que gere também a equação de K.G. que definirá a dinâmica do campo de áxion, considerando principalmente a dualidade eletromagnética. O trabalho do Singleton será utilizado como referência, bem como o artigo do Wilczek (WILCZEK, 1987). Enquanto o primeiro fornece a ideia de Zwanziger (ZWANZIGER, 1971) sobre o uso de dois potenciais além de elucidar a fenomenologia do fóton dual, este segundo fornece uma luz sobre a forma das equações de movimento.

É necessário ressaltar que as etapas seguintes representarão um estágio próximo da consolidação do objetivo. A confirmação de que o objetivo não terá sido alcançado vem da definição que o monopolo de Dirac possui. É sabido que o monopolo se assemelha à carga elétrica, ou seja, enquanto a mesma produz um campo elétrico radial, o modelo proposto para o monopolo procura representar também um campo magnético radial que é produzido pelo próprio monopolo. Além disso, como a própria carga elétrica sofre influências de campos elétrico e magnético, o monopolo também precisa ter o mesmo comportamento. No entanto, após a descrição de todo o sistema, na etapa final é possível perceber que o monopolo não sentirá o campo magnético $\vec{B}$, e isso faz com que o mesmo seja tratado como uma outra carga elétrica, que acaba por distorcer o objetivo do presente estudo. Alguns ajustes visualmente simples permitirão, no próximo capítulo, chegar ao objetivo.

Ficará estabelecido que o fóton usual será responsável por fornecer a natureza elétrica para o sistema e, portanto, terá relação com o tensor $F^{\mu\nu}$, enquanto o fóton dual será responsável pela parte magnética do sistema e se relacionará com o tensor $G^{\mu\nu}$ que é totalmente independente de $F^{\mu\nu}$.

Concordando com o que foi apresentado por Singleton, a identidade de Bianchi para os campos relativos a cada fóton não será violada. Vale destacar que o uso de dois potenciais fornece esta possibilidade que não era possível na abordagem usual, em que simetrização ocorria justamente por conta de tal violação.

As equações de movimento que serão consideradas são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - \partial_\mu(\theta\ {}^*F^{\mu\nu}) = J_e^\nu; \tag{181}$$
$$\partial_\mu\ {}^*F^{\mu\nu} = 0; \tag{182}$$
$$\partial_\mu G^{\mu\nu} - \partial_\mu(\theta\ {}^*G^{\mu\nu}) = J_m^\nu; \tag{183}$$
$$\partial_\mu\ {}^*G^{\mu\nu} = 0, \tag{184}$$

em que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; \tag{185}$$
$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu, \tag{186}$$

e os tensores duais ${}^*F^{\mu\nu}$ e ${}^*G^{\mu\nu}$ são novamente definidos por

$$^*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}; \tag{187}$$
$$^*G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}G^{\rho\sigma}. \tag{188}$$

É possível perceber que esta proposta de definição desacopla completamente os campos, mas além disso há uma consequência física a partir desta definição que faz com que esse modelo se afaste daquele que está sendo desejado. Isto se dá pelo fato de que o monopolo proposto por Dirac não sentirá os campos elétrico e magnético, pois ao assumir posteriormente que $E^i = F^{0i}$, por exemplo, faz com que o monopolo de Dirac interaja apenas com o fóton dual, o que não descreveria a fenomenologia esperada.

Pode-se definir, convenientemente, um novo conjunto de entidades eletromagnéticas que permitirão uma mistura entre os campos/tensores, isto é

$$H^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} - {}^*G^{\mu\nu}; \tag{189}$$
$$M^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + {}^*G^{\mu\nu}. \tag{190}$$

Seus respectivos duais podem ser obtidos observando o procedimento (112), obtendo

$$^*H^{\mu\nu} = {}^*F^{\mu\nu} + G^{\mu\nu}; \tag{191}$$
$$^*M^{\mu\nu} = {}^*F^{\mu\nu} - G^{\mu\nu}. \tag{192}$$

Vale lembrar que na seção anterior existia uma ambiguidade, isto é, novos campos poderiam ser definidos já que os campos elétrico e magnético tinham descrições específicas envolvendo os tensores. Uma vez que define-se, por exemplo, $E^i = F^{0i} - {}^*G^{0i}$, um novo campo deveria ser encontrado ao ser feito $F^{0i} + {}^*G^{0i}$. Na presente seção, pretende-se encontrar as equações de Maxwell em termos de $H^{\mu\nu}$ e $M^{\mu\nu}$ na forma covariante antes de definir os campos físicos.

Subtraindo (184) da (181) tem-se

$$\begin{aligned}&\partial_\mu(F^{\mu\nu} - {}^*G^{\mu\nu}) - \partial_\mu(\theta\, {}^*F^{\mu\nu}) = J_e^\nu;\\ &\Rightarrow \partial_\mu H^{\mu\nu} - \partial_\mu(\theta\, {}^*F^{\mu\nu}) = J_e^\nu.\end{aligned} \tag{193}$$

Analogamente, somando (182) com (183) obtém-se

$$\begin{aligned}&\partial_\mu({}^*F^{\mu\nu} + G^{\mu\nu}) - \partial_\mu(\theta\, {}^*G^{\mu\nu}) = J_m^\nu;\\ &\Rightarrow \partial_\mu\, {}^*H^{\mu\nu} - \partial_\mu(\theta\, {}^*G^{\mu\nu}) = J_m^\nu.\end{aligned} \tag{194}$$

Somando (181) com (184) pode-se obter

$$\begin{aligned}&\partial_\mu(F^{\mu\nu} + {}^*G^{\mu\nu}) - \partial_\mu(\theta\, {}^*F^{\mu\nu}) = J_e^\nu;\\ &\Rightarrow \partial_\mu M^{\mu\nu} - \partial_\mu(\theta\, {}^*F^{\mu\nu}) = J_e^\nu.\end{aligned} \tag{195}$$

E subtraindo (183) de (182) obtém-se

$$\begin{aligned}&\partial_\mu({}^*F^{\mu\nu} - G^{\mu\nu}) + \partial_\mu(\theta\, {}^*G^{\mu\nu}) = -J_m^\nu;\\ &\Rightarrow \partial_\mu\, {}^*M^{\mu\nu} + \partial_\mu(\theta\, {}^*G^{\mu\nu}) = -J_m^\nu.\end{aligned} \tag{196}$$

Pode-se ainda reescrever, se assim for conveniente, as quatro equações anteriores em termos de $H^{\mu\nu}$, ${}^*H^{\mu\nu}$, $M^{\mu\nu}$ e ${}^*M^{\mu\nu}$. Somando a equações (191) e (192) tem-se

$${}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left({}^*H^{\mu\nu} + {}^*M^{\mu\nu}\right). \tag{197}$$

E de forma análoga, subtraindo a equação (189) da (190), tem-se

$${}^*G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(M^{\mu\nu} - H^{\mu\nu}\right). \tag{198}$$

Assim, o conjunto de equações (181) - (184) se torna

$$\partial_\mu H^{\mu\nu} - \partial_\mu\left(\frac{\theta}{2}[{}^*M^{\mu\nu} + {}^*H^{\mu\nu}]\right) = J_e^\nu; \tag{199}$$

$$\partial_\mu\, {}^*H^{\mu\nu} - \partial_\mu\left(\frac{\theta}{2}[M^{\mu\nu} - H^{\mu\nu}]\right) = J_m^\nu; \tag{200}$$

$$\partial_\mu M^{\mu\nu} - \partial_\mu\left(\frac{\theta}{2}[{}^*M^{\mu\nu} + {}^*H^{\mu\nu}]\right) = J_e^\nu; \tag{201}$$

$$\partial_\mu\, {}^*M^{\mu\nu} + \partial_\mu\left(\frac{\theta}{2}[M^{\mu\nu} - H^{\mu\nu}]\right) = -J_m^\nu \tag{202}$$

Aplicando o *dual hodge* nas equações (197) e (198) usando (112), tem-se

$$F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(M^{\mu\nu} + H^{\mu\nu}); \tag{203}$$
$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}({}^*H^{\mu\nu} - {}^*M^{\mu\nu}). \tag{204}$$

Com as definições já apresentadas, pode-se expor, explicitamente, as equações de Maxwell para o sistema, utilizando as equações (181) - (184). Mas para isto, é necessário lembrar que como o sistema possui um novo fóton - o dual - novos campos precisam ser definidos. Os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ serão obtidos através do tensor $F^{\mu\nu}$, enquanto o tensor $G^{\mu\nu}$ produzirá dois outros campos duais, sendo um elétrico e um magnético que serão representados, respectivamente, por $\vec{D}$ e $\vec{F}$. É importante ressaltar que em seu artigo (SINGLETON, 1995), Singleton não faz menção aos novos campos $\vec{D}$ e $\vec{F}$, criados com a inclusão do novo fóton na teoria.

Considerando o fóton usual, admitindo que

$$F^{i0} = E^i; \tag{205}$$
$${}^*F^{i0} = B^i, \tag{206}$$

a equação (181) se torna, para $\nu = 0$

$$\partial_i F^{i0} - \partial_i(\theta\, {}^*F^{i0}) = J_e^0;$$
$$\partial_i E^i - \partial_i(\theta B^i) = J_e^0;$$
$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} - \theta\vec{B}) = \rho_e. \tag{207}$$

E para $\nu = i$, tem-se

$$\partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} - \partial_0(\theta\, {}^*F^{0i}) - \partial_j(\theta\, {}^*F^{ji}) = J_e^i;$$
$$\partial_0 E^i - \partial_0(\theta B^i) + \partial_j \varepsilon^{jik} B_k - \partial_j \left(\frac{\theta}{2}\, \varepsilon^{ji0k} F_{0k}\right) = J_e^i;$$
$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{B} - \theta\vec{E}) = \vec{J}_e + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} - \theta\vec{B}). \tag{208}$$

Como a identidade de Bianchi não é violada para nenhum dos fótons, a equação (182) vai gerar as duas outras equações de Maxwell usuais

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0; \tag{209}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{210}$$

De forma completamente análoga, pode-se encontrar as quatro equações de Maxwell para o fóton dual, que estarão em termos dos campos $\vec{D}$ e $\vec{F}$. Considerando que $G^{i0} = D^i$

e $^*G^{i0} = F^i$, a equação (183) com $\nu = 0$ se torna

$$\begin{aligned}
&\partial_i G^{i0} - \partial_i(\theta\ ^*G^{i0}) = J^0_m;\\
&\partial_i D^i - \partial_i(\theta F^i) = J^0_m;\\
&\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot(\vec{D} - \theta\vec{F}) = \rho_m. \qquad (211)
\end{aligned}$$

E para $\nu = i$, tem-se

$$\begin{aligned}
&\partial_0 G^{0i} + \partial_j G^{ji} - \partial_0(\theta\ ^*G^{0i}) - \partial_j(\theta\ ^*G^{ji}) = J^i_m;\\
&\partial_0 D^i - \partial_0(\theta F^i) + \partial_j \varepsilon^{jik} F_k - \partial_j\left(\frac{\theta}{2}\ \varepsilon^{ji0k} G_{0k}\right) = J^i_m;\\
&\Rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{F} - \theta\vec{D}) = \vec{J}_m + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{D} - \theta\vec{F}). \qquad (212)
\end{aligned}$$

E da mesma forma, a identidade de Bianchi para este caso gera as equações

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 0; \qquad (213)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{D} = -\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}. \qquad (214)$$

Antes de propor a discussão sobre a forma da ação, deve-se perguntar sobre a equação de K.G. para o áxion.

O termo padrão relativo ao acoplamento do áxion é o $F\ ^*F$. Só que neste caso há dois fótons no sistema, isto é, a interação do áxion com os campos eletromagnéticos deveriam vir através de dois termos, um para cada fóton.

Pode-se sugerir a seguinte forma para a equação de K.G. para o áxion

$$\begin{aligned}
\left(\Box + m^2\right)\theta &= g^2(F_{\mu\nu}\ ^*F^{\mu\nu} - G_{\mu\nu}\ ^*G^{\mu\nu});\\
&= \frac{g^2}{2}\left(M_{\mu\nu}\ ^*M^{\mu\nu} + H_{\mu\nu}\ ^*H^{\mu\nu}\right). \qquad (215)
\end{aligned}$$

É possível ver que em termos de $M^{\mu\nu}$ e $H^{\mu\nu}$ a equação de K.G. possui uma coerência com o que se espera, ou seja, o acoplamento do tensor com o seu dual. As duas parcelas são provenientes dos dois fótons presentes no formalismo. Mas se acaso a sugestão fosse

$$\left(\Box + m^2\right)\theta = g^2(F_{\mu\nu}\ ^*F^{\mu\nu} + G_{\mu\nu}\ ^*G^{\mu\nu}), \qquad (216)$$

o que seria obtido é bem diferente do termo anterior encontrado, isto é

$$\left(\Box + m^2\right)\theta = g^2 M_{\mu\nu}\ ^*H_{\mu\nu} = g^2 H_{\mu\nu}\ ^*M_{\mu\nu}, \qquad (217)$$

que certamente iria promover uma interação diferente na ação e por consequência iria acoplar o fóton usual com o dual.

Como foi discutido anteriormente, este modelo não pode ser encarado como correto, se a pretensão é ter no sistema o monopolo proposto por Dirac. O monopolo de Dirac tem uma característica similar a de uma carga elétrica, ou seja, ele seria responsável por gerar um campo magnético radial bem como uma carga elétrica o faz. Isto é, tanto a carga elétrica quanto o monopolo magnético teriam que sentir os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, o que não é verdade, já que o monopolo, segundo a descrição anterior apenas seria influenciado pelos campos $\vec{D}$ e $\vec{F}$, do fóton dual, como pode ser visto pelas equações (211) e (212). É possível dizer que este modelo trata o monopolo como uma nova carga elétrica e isto distorce todo o estudo. O setor elétrico fica completamente desacoplado do magnético, como pode ser visto pelo conjunto de equações

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} - \theta\vec{B}) = \rho_e; \tag{218}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B} - \theta\vec{E}) = \vec{J}_e + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} - \theta\vec{B}); \tag{219}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{D} - \theta\vec{F}) = \rho_m; \tag{220}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{F} - \theta\vec{D}) = \vec{J}_m + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{D} - \theta\vec{F}). \tag{221}$$

Ainda assim, mesmo que o objetivo não tenha sido alcançado, este foi o primeiro e único modelo capaz de se aproximar de uma definição de ação para o plasma carregado com a inclusão do campo de áxion que também possui a sua dinâmica bem descrita pela equação de K.G..

Para atingir o objetivo do presente estudo, faz-se necessário propor pequenas modificações nas definições dos campos para que se tenha de fato o monopolo de Dirac.

3 A DUALIDADE NA ELETRODINÂMICA AXIÔNICA

As seções e capítulos anteriores foram essenciais para esta etapa. A investigação se iniciou com a percepção de que o artigo (RODRIGUES, 2018) não expôs uma ação para o sistema proposto e isto gerou toda esta série de questionamentos. Parecia que incluir no plasma todos esses ingredientes tornava o objetivo inalcançável; mas a descrição do sistema através de dois potenciais permitirá que o objetivo seja consolidado.

Por mais que possa parecer simples, a única alteração que precisaria ser feita para que de fato o monopolo de Dirac estivesse presente no sistema é a redefinição dos campos elétrico e magnético.

Alguns passos serão repetidos para facilitar maior clareza.

3.1 As definições dos campos físicos

Pode-se iniciar escrevendo as equações de Maxwell na sua forma covariante para os dois fótons presentes no sistema

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - \partial_\mu(\theta\ {}^*F^{\mu\nu}) = J_e^\nu; \tag{222}$$
$$\partial_\mu\ {}^*F^{\mu\nu} = 0; \tag{223}$$
$$\partial_\mu G^{\mu\nu} + \partial_\mu(\theta\ {}^*G^{\mu\nu}) = J_m^\nu; \tag{224}$$
$$\partial_\mu\ {}^*G^{\mu\nu} = 0, \tag{225}$$

sendo as entidades eletromagnéticas novamente definidas por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; \tag{226}$$
$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu, \tag{227}$$

e seus respectivos duais definidos por

$${}^*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}; \tag{228}$$
$${}^*G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}G^{\rho\sigma}. \tag{229}$$

Note que na penúltima equação do conjunto (222) - (225) há uma mudança em um sinal que tornará o sistema compatível com a equação de K.G. mais à frente. E ainda pode-se definir, por conveniência, as entidades eletromagnéticas que acoplam os campos da mesma forma como já foi apresentada

$$H^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} - {}^{*}G^{\mu\nu}; \tag{230}$$

$$^{*}H^{\mu\nu} = {}^{*}F^{\mu\nu} + G^{\mu\nu}; \tag{231}$$

$$M^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + {}^{*}G^{\mu\nu}. \tag{232}$$

$$^{*}M^{\mu\nu} = {}^{*}F^{\mu\nu} - G^{\mu\nu}. \tag{233}$$

Os campos elétrico e magnético para os dois fótons serão definidos agora de forma diferentes, ou seja

$$E^{i} = H^{i0} = F^{i0} - {}^{*}G^{i0}; \tag{234}$$

$$B^{i} = {}^{*}H^{i0} = {}^{*}F^{i0} + G^{i0}; \tag{235}$$

$$D^{i} = M^{i0} = F^{i0} + {}^{*}G^{i0}; \tag{236}$$

$$F^{i} = {}^{*}M^{i0} = {}^{*}F^{i0} - G^{i0}. \tag{237}$$

E usando as igualdades

$$^{*}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left({}^{*}H^{\mu\nu} + {}^{*}M^{\mu\nu}\right); \tag{238}$$

$$^{*}G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(M^{\mu\nu} - H^{\mu\nu}\right); \tag{239}$$

$$F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(M^{\mu\nu} + H^{\mu\nu}\right); \tag{240}$$

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left({}^{*}H^{\mu\nu} - {}^{*}M^{\mu\nu}\right), \tag{241}$$

pode-se reescrever as equações de Maxwell na forma covariante em termos de M e H. Subtraindo (225) de (222) e usando (238) tem-se

$$\partial_{\mu}H^{\mu\nu} - \partial_{\mu}\left(\frac{\theta}{2}[{}^{*}M^{\mu\nu} + {}^{*}H^{\mu\nu}]\right) = J_{e}^{\nu}. \tag{242}$$

Somando (223) com (224) e usando (239) tem-se

$$\partial_{\mu}\,{}^{*}H^{\mu\nu} + \partial_{\mu}\left(\frac{\theta}{2}[M^{\mu\nu} - H^{\mu\nu}]\right) = J_{m}^{\nu}. \tag{243}$$

De forma análoga para o fóton dual, pode-se somar (222) com (225) e usar (238) tem-se

$$\partial_{\mu}M^{\mu\nu} - \partial_{\mu}\left(\frac{\theta}{2}[{}^{*}M^{\mu\nu} + {}^{*}H^{\mu\nu}]\right) = J_{e}^{\nu}. \tag{244}$$

E subtraindo (224) de (223) e usando (239) tem-se

$$\partial_\mu \, {}^*M^{\mu\nu} - \partial_\mu \left(\frac{\theta}{2} [M^{\mu\nu} - \ H^{\mu\nu}] \right) = -J^\nu_m. \tag{245}$$

Considerando-se $\theta = 0$, as duas equações anteriores retornam ao caso que pode ser encontrado em (KUMAR,).

3.2 Das equações de Maxwell às equações de onda

Singleton em seu artigo (SINGLETON, 1995) menciona que o fóton dual possui um comportamento matemático diferente podendo apresentar um sinal negativo que se destaca na comparação com o fóton usual. Este sinal aparece na última equação (245) e pode ser encarado como uma paridade alterada, isto é, este presente sistema ainda preserva esta mesma característica do outro mais simples, utilizado como guia.

Com estas alterações, as equações de Maxwell escritas em notação vetorial para o fóton usual possuem a forma

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} - \frac{\theta}{2}(\vec{B} + \vec{F}) \right) = \rho_e; \tag{246}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{B} + \frac{\theta}{2}(\vec{E} + \vec{D}) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{E} - \frac{\theta}{2}(\vec{B} + \vec{F}) \right) + \vec{J}_e; \tag{247}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{B} + \frac{\theta}{2}(\vec{D} - \vec{E}) \right) = \rho_m; \tag{248}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} - \frac{\theta}{2}(\vec{F} - \vec{B}) \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{B} - \frac{\theta}{2}(\vec{E} - \vec{D}) \right) - \vec{J}_m. \tag{249}$$

E para o fóton dual, as equações seriam similares, com trocas entre os campos, isto é

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{D} - \frac{\theta}{2}(\vec{F} + \vec{B}) \right) = \rho_e; \tag{250}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} + \frac{\theta}{2}(\vec{D} + \vec{E}) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{D} - \frac{\theta}{2}(\vec{F} + \vec{B}) \right) + \vec{J}_e; \tag{251}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} - \frac{\theta}{2}(\vec{D} - \vec{E}) \right) = -\rho_m; \tag{252}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{D} + \frac{\theta}{2}(\vec{F} - \vec{B}) \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{F} + \frac{\theta}{2}(\vec{E} - \vec{D}) \right) + \vec{J}_m. \tag{253}$$

Nesta etapa pode-se questionar sobre a estrutura das equações, principalmente se elas preservam a equação da continuidade e se descrevem uma equação de onda. Para responder ao primeiro questionamento, pode-se aplicar o divergente na equação (247), obtendo

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}-\frac{\theta}{2}(\vec{B}+\vec{F})\right)+\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_e=0, \tag{254}$$

já que todo divergente do rotacional é nulo. Usando (246) tem-se

$$\frac{\partial\rho_e}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_e=0, \tag{255}$$

que é a equação da continuidade para a carga elétrica. Pode-se realizar o procedimento análogo para a carga magnética aplicando o divergente na equação (249) obtendo

$$-\frac{\partial}{\partial t}\,\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{B}-\frac{\theta}{2}(\vec{E}-\vec{D})\right)-\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_m=0 \tag{256}$$

Ao usar a equação (248) tem-se

$$\frac{\partial\rho_m}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_m=0. \tag{257}$$

Repetindo passos perfeitamente análogos, pode-se encontrar as mesmas equações para o fóton dual, ou seja, a continuidade para as duas naturezas de cargas são preservadas neste sistema.

As equações de onda podem ser obtidas da mesma forma como é feito para as equações de Maxwell usuais. Neste caso será feito primeiramente para o fóton usual. É conveniente redefinir os campos para que o tratamento matemático se torne ligeiramente mais simples. A convenção adotada será

$$\vec{E}_+=\vec{E}-\frac{\theta}{2}(\vec{F}+\vec{B}); \tag{258}$$

$$\vec{E}_-=\vec{E}-\frac{\theta}{2}(\vec{F}-\vec{B}); \tag{259}$$

$$\vec{B}_+=\vec{B}+\frac{\theta}{2}(\vec{D}+\vec{E}); \tag{260}$$

$$\vec{B}_-=\vec{B}+\frac{\theta}{2}(\vec{D}-\vec{E}). \tag{261}$$

Desta forma, as equações de Maxwell em termos de $\vec{E}_+$ e $\vec{B}_+$ para o fóton usual se tornam

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_+ = \rho_e; \tag{262}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B}_+ = \frac{\partial\vec{E}_+}{\partial t} + \vec{J}_e; \tag{263}$$
$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{B}_+ - \theta\vec{E}) = \rho_m; \tag{264}$$
$$\vec{\nabla}\times(\vec{E}_+ + \theta\vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B}_+ - \theta\vec{E}) - \vec{J}_m. \tag{265}$$

Aplicando o rotacional em (263) tem-se

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}_+) = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{E}_+) + \vec{\nabla}\times\vec{J}_e. \tag{266}$$

Usando (7), (264) e (265) tem-se

$$\begin{aligned}
&\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_+) - \nabla^2\vec{B}_+ = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B}_+ - \theta\vec{E}) - \vec{J}_m - \vec{\nabla}\times(\theta\vec{B})\right) + \vec{\nabla}\times\vec{J}_e;\\
&\Rightarrow \vec{\nabla}[\rho_m + \vec{\nabla}\cdot(\theta\vec{E})] - \nabla^2\vec{B}_+ = -\frac{\partial^2\vec{B}_+}{\partial t^2} + \frac{\partial^2(\theta\vec{E})}{\partial t^2} - \frac{\partial\vec{J}_m}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}[\vec{\nabla}\times(\theta\vec{B})] + \vec{\nabla}\times\vec{J}_e;\\
&\Rightarrow \frac{\partial^2\vec{B}_+}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{B}_+ - \frac{\partial^2(\theta\vec{E})}{\partial t^2} + \frac{\partial\vec{J}_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}[\vec{\nabla}\times(\theta\vec{B})] - \vec{\nabla}\times\vec{J}_e + \vec{\nabla}\rho_m + \vec{\nabla}[\vec{\nabla}\cdot(\theta\vec{E})] = 0;\\
&\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\vec{B} + \frac{\theta}{2}(\vec{D} + \vec{E})\right) - \nabla^2\left(\vec{B} + \frac{\theta}{2}(\vec{D} + \vec{E})\right) - \frac{\partial^2(\theta\vec{E})}{\partial t^2} + \frac{\partial\vec{J}_m}{\partial t}\\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial t}[\vec{\nabla}\times(\theta\vec{B})] - \vec{\nabla}\times\vec{J}_e + \vec{\nabla}\rho_m + \vec{\nabla}[\vec{\nabla}\cdot(\theta\vec{E})] = 0.
\end{aligned} \tag{267}$$

Este procedimento pode também ser feito em termos do campo elétrico. Aplicando o rotacional na equação (265) tem-se

$$\vec{\nabla}\times[\vec{\nabla}\times(\vec{E}_+ + \theta\vec{B})] = -\frac{\partial}{\partial t}[\vec{\nabla}\times(\vec{B}_+ - \theta\vec{E})] - \vec{\nabla}\times\vec{J}_m. \tag{268}$$

Usando (7), (262) e (263), pode-se obter

$$\begin{aligned}
&\vec{\nabla}[\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}_+ + \theta\vec{B})] - \nabla^2(\vec{E}_+ + \theta\vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{E}_+}{\partial t} + \vec{J}_e - \vec{\nabla}\times(\theta\vec{E})\right) + \vec{\nabla}\times\vec{J}_m;\\
&\Rightarrow \vec{\nabla}[\rho_e + \vec{\nabla}\cdot(\theta\vec{B})] - \nabla^2\vec{E}_+ - \nabla^2(\theta\vec{B}) = -\frac{\partial^2\vec{E}_+}{\partial t^2} - \frac{\partial\vec{J}_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}[\vec{\nabla}\times(\theta\vec{E})] + \vec{\nabla}\times\vec{J}_e;\\
&\Rightarrow \frac{\partial^2\vec{E}_+}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{E}_+ - \nabla^2(\theta\vec{B}) + \frac{\partial\vec{J}_e}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}[\vec{\nabla}\times(\theta\vec{E})] + \vec{\nabla}\times\vec{J}_m + \vec{\nabla}\rho_e + \vec{\nabla}[\vec{\nabla}\cdot(\theta\vec{B})] = 0;\\
&\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\vec{E} - \frac{\theta}{2}(\vec{F} + \vec{B})\right) - \nabla^2\left(\vec{E} - \frac{\theta}{2}(\vec{F} + \vec{B})\right) - \nabla^2(\theta\vec{B}) + \frac{\partial\vec{J}_e}{\partial t}\\
&\qquad - \frac{\partial}{\partial t}[\vec{\nabla}\times(\theta\vec{E})] + \vec{\nabla}\times\vec{J}_m + \vec{\nabla}\rho_e + \vec{\nabla}[\vec{\nabla}\cdot(\theta\vec{B})] = 0.
\end{aligned} \tag{269}$$

Para o fóton dual os passos serão semelhantes. Também é conveniente reescrever

$$\vec{D}_+ = \vec{D} - \frac{\theta}{2}(\vec{F} + \vec{B}); \tag{270}$$

$$\vec{D}_- = \vec{D} - \frac{\theta}{2}(\vec{B} - \vec{F}); \tag{271}$$

$$\vec{F}_+ = \vec{F} + \frac{\theta}{2}(\vec{E} + \vec{D}); \tag{272}$$

$$\vec{F}_- = \vec{F} + \frac{\theta}{2}(\vec{E} - \vec{D}). \tag{273}$$

As equações de Maxwell em termos de D_+ e F_+ para o fóton dual se tornam

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}_+ = \rho_e; \tag{274}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_+ = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}_+ + \vec{J}_e; \tag{275}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F}_+ - \theta\vec{D}) = -\rho_m; \tag{276}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{D}_+ + \theta\vec{F}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{F}_+ - \theta\vec{D}) + \vec{J}_m. \tag{277}$$

Aplicando o rotacional na equação (275) tem-se

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}_+) = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{D}_+) + \vec{\nabla} \times \vec{J}_e. \tag{278}$$

Usando (7), (276) e (277) pode-se obter

$$\begin{aligned}
&\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_+) - \nabla^2\vec{F}_+ = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{F}_+ - \theta\vec{D}) + \vec{J}_m - \vec{\nabla} \times (\theta\vec{F})\right) + \vec{\nabla} \times \vec{J}_e;\\
&\Rightarrow \vec{\nabla}[-\rho_m + \vec{\nabla} \cdot (\theta\vec{D})] - \nabla^2\vec{F}_+ = -\frac{\partial^2\vec{F}_+}{\partial t^2} + \frac{\partial^2(\theta\vec{D})}{\partial t^2} + \frac{\partial\vec{J}_m}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}[\vec{\nabla} \times (\theta\vec{F})] + \vec{\nabla} \times \vec{J}_e;\\
&\Rightarrow \frac{\partial^2\vec{F}_+}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{F}_+ - \frac{\partial^2(\theta\vec{D})}{\partial t^2} - \frac{\partial\vec{J}_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}[\vec{\nabla} \times (\theta\vec{F})] - \vec{\nabla} \times \vec{J}_e - \vec{\nabla}\rho_m + \vec{\nabla}[\vec{\nabla} \cdot (\theta\vec{D})] = 0;\\
&\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\vec{F} + \frac{\theta}{2}(\vec{E} + \vec{D})\right) - \nabla^2\left(\vec{F} + \frac{\theta}{2}(\vec{E} + \vec{D})\right) - \frac{\partial^2(\theta\vec{D})}{\partial t^2} - \frac{\partial\vec{J}_m}{\partial t}\\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial t}[\vec{\nabla} \times (\theta\vec{F})] - \vec{\nabla} \times \vec{J}_e - \vec{\nabla}\rho_m + \vec{\nabla}[\vec{\nabla} \cdot (\theta\vec{D})] = 0.
\end{aligned} \tag{279}$$

E de forma análoga, aplicando o rotacional na equação (277) tem-se

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times (\vec{D}_+ + \theta\vec{F})] = -\frac{\partial}{\partial t}[\vec{\nabla} \times (\vec{F}_+ - \theta\vec{D})] + \vec{\nabla} \times \vec{J}_m. \tag{280}$$

Utilizando (7), (274) e (275), obtém-se

$$
\begin{aligned}
&\vec{\nabla}[\vec{\nabla}\cdot(\vec{D}_{+}+\theta\vec{F})]-\nabla^{2}(\vec{D}_{+}+\theta\vec{F})=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}_{+}+\vec{J}_{e}-\vec{\nabla}\times(\theta\vec{D})\right)+\vec{\nabla}\times\vec{J}_{m};\\
&\Rightarrow\vec{\nabla}[\rho_{e}+\vec{\nabla}\cdot(\theta\vec{F})]-\nabla^{2}(\vec{D}_{+}+\theta\vec{F})=-\frac{\partial^{2}\vec{D}_{+}}{\partial t^{2}}-\frac{\partial\vec{J}_{e}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}[\vec{\nabla}\times(\theta\vec{D})]+\vec{\nabla}\times\vec{J}_{m};\\
&\Rightarrow\frac{\partial^{2}\vec{D}_{+}}{\partial t^{2}}-\nabla^{2}\vec{D}_{+}+\frac{\partial\vec{J}_{e}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}[\vec{\nabla}\times(\theta\vec{D})]-\vec{\nabla}\times\vec{J}_{m}+\vec{\nabla}\rho_{e}+\vec{\nabla}[\vec{\nabla}\cdot(\theta\vec{F})]-\nabla^{2}(\theta\vec{F})=0;\\
&\Rightarrow\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\left(\vec{D}-\frac{\theta}{2}(\vec{F}+\vec{B})\right)-\nabla^{2}\left(\vec{D}-\frac{\theta}{2}(\vec{F}+\vec{B})\right)+\frac{\partial\vec{J}_{e}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}[\vec{\nabla}\times(\theta\vec{D})]\\
&\qquad\qquad-\vec{\nabla}\times\vec{J}_{m}+\vec{\nabla}\rho_{e}+\vec{\nabla}[\vec{\nabla}\cdot(\theta\vec{F})]-\nabla^{2}(\theta\vec{F})=0. \qquad (281)
\end{aligned}
$$

Pode ser conveniente apresentar as equações de onda em termos dos quadripotenciais, já que desta forma a expressão ficaria mais condensada. Utilizando (222) tem-se

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\mu}(\partial^{\mu}A^{\nu}-\partial^{\nu}A^{\mu})-(\partial_{\mu}\theta)\ {}^{*}F^{\mu\nu}=J_{e}^{\nu};\\
&\Rightarrow\partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{\nu}-\partial^{\nu}\partial_{\mu}A^{\mu}-(\partial_{\mu}\theta)\ {}^{*}F^{\mu\nu}=J_{e}^{\nu};\\
&\Rightarrow\partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{\nu}-(\partial_{\mu}\theta)\ {}^{*}F^{\mu\nu}=J_{e}^{\nu};\\
&\Rightarrow\Box A^{\nu}-(\partial_{\mu}\theta)\ \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}=J_{e}^{\nu};\\
&\Rightarrow\Box A^{\nu}-(\partial_{\mu}\theta)\ \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_{\rho}A_{\sigma}-\partial_{\sigma}A_{\rho})=J_{e}^{\nu}; \qquad (282)\\
&\Rightarrow\Box A^{\nu}-(\partial_{\mu}\theta)\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_{\rho}A_{\sigma}=J_{e}^{\nu}, \qquad (283)
\end{aligned}
$$

que foi utilizado o *gauge de Lorentz* na segunda linha, isto é, $\partial_{\mu}A^{\mu}=0$. De forma análoga para o fóton dual, tem-se

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\mu}(\partial^{\mu}C^{\nu}-\partial^{\nu}C^{\mu})+(\partial_{\mu}\theta)\ {}^{*}G^{\mu\nu}=J_{m}^{\nu};\\
&\Rightarrow\partial_{\mu}\partial^{\mu}C^{\nu}-\partial^{\nu}\partial_{\mu}C^{\mu}+(\partial_{\mu}\theta)\ {}^{*}G^{\mu\nu}=J_{m}^{\nu};\\
&\Rightarrow\partial_{\mu}\partial^{\mu}C^{\nu}+(\partial_{\mu}\theta)\ {}^{*}G^{\mu\nu}=J_{m}^{\nu};\\
&\Rightarrow\Box C^{\nu}+(\partial_{\mu}\theta)\ \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}G_{\rho\sigma}=J_{m}^{\nu};\\
&\Rightarrow\Box C^{\nu}+(\partial_{\mu}\theta)\ \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_{\rho}C_{\sigma}-\partial_{\sigma}C_{\rho})=J_{m}^{\nu}; \qquad (284)\\
&\Rightarrow\Box C^{\nu}-(\partial_{\mu}\theta)\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_{\rho}C_{\sigma}=J_{m}^{\nu}, \qquad (285)
\end{aligned}
$$

Encerrando a discussão sobre o formato das equações de onda para os campos, pode-se avançar questionando-se sobre a equação de K.G. para o áxion, bem como a ação que descreva completamente o sistema. Esta será uma ação local e efetiva que contempla tanto as cargas, os fótons presentes e o áxion.

3.3 Eletrodinâmica axiônica: ação, K.G. e a dualidade eletromagnética

No capítulo anterior, foi apresentada uma discussão breve sobre a forma de equação de K.G. que deveria combinar com o que está sendo procurado. Foi possível observar que a definição algébrica entre as entidades F e G alterariam a forma em termos de H e M e esta informação novamente precisará ser levada em consideração.

Se acaso o sistema possuísse apenas um fóton, o lado direito da equação de K.G. deveria ser proporcional ao produto escalar entre os campos elétrico e magnético. No entanto, como neste sistema há um segundo fóton que acaba por incluir um novo par de campos ($\vec{D}$ e $\vec{F}$), é fácil intuir que será necessário incluir um novo "$E \cdot B$".

Sendo assim, a equação de K.G. para o presente sistema deve ter a forma

$$\left(\Box + m_\theta^2\right)\ \theta = g^2(F_{\mu\nu}\ {}^*F^{\mu\nu} - G_{\mu\nu}\ {}^*G^{\mu\nu}). \tag{286}$$

A escolha do sinal - escrevendo como uma diferença - faz com que o lado direito da equação anterior se torne

$$F_{\mu\nu}\ {}^*F^{\mu\nu} - G_{\mu\nu}\ {}^*G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(M_{\mu\nu}\ {}^*M^{\mu\nu} + H_{\mu\nu}\ {}^*H^{\mu\nu}), \tag{287}$$

na qual foram usadas as relações (238) - (241).

Esta foi a última consideração necessária para expor o lagrangiano que descreverá todo o sistema. Respeitando as identidades de Bianchi para os dois fótons, a ação que precisa gerar as equações de movimento (222), (224) e (286) precisa ter a forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \theta(F_{\mu\nu}\ {}^*F^{\mu\nu} - G_{\mu\nu}\ {}^*G^{\mu\nu})\\ - A_\mu J_e^\mu - C_\mu J_m^\mu + \frac{1}{2g^2}\ \partial_\mu\theta\ \partial^\mu\theta - \frac{m_\theta^2}{2g^2}\theta^2.\end{aligned} \tag{288}$$

É possível perceber que por E.L., as equações de movimento são obtidas facilmente. Antes de prosseguir para a etapa de discussão sobre a dualidade eletromagnética para o sistema, faz-se necessário mencionar sobre a natureza do fóton dual que surgiu com o uso de dois potenciais.

Pode ser que alguns questionamentos a cerca da possível existência deste segundo fóton apareçam já que, sendo o fóton uma partícula que não possui massa, poderia se tornar mais fácil de ser detectada. Singleton, como já foi mencionado, justifica sobre a impossibilidade de detectar este segundo fóton (o dual) em seu artigo e menciona o Mecanismo de Higgs como uma forma de argumentar que, ao ganhar massa, o mesmo não poderia ser detectado. Ainda que esta seja uma excelente explicação sobre a fenomenologia do fóton dual, o mesmo não apresenta detalhes em seu artigo sobre este modelo tão conhecido.

Ainda que se tenha pensado que todo o objetivo tenha sido alcançado, isso não é verdade. Há uma pergunta em aberto que se trata de toda a essência do presente estudo: a dualidade eletromagnética. Foi discutido no primeiro capítulo a dualidade no ponto de vista mais simples que acontece no Eletromagnetismo usual, isto é, a simples troca de $\vec{E}$ por $\vec{B}$ e de $\vec{B}$ por $-\vec{E}$, como já exposto. No entanto, à medida que a pesquisa foi avançando e novos ingredientes importantes eram adicionados no sistema, foi possível perceber que a dualidade se estendeu e foi discutida por um viés matricial, em que as grandezas deveriam mudar sobre uma rotação entre os espaços.

É possível intuir que a dualidade eletromagnética para o sistema atual deva ser mais complexa, já que há muitas coisas a serem consideradas, como as duas naturezas de cargas e o áxion. Vale ressaltar que a dualidade é uma troca entre os campos de maneira a manter todo o sistema (lê-se equações) invariante mediante às tais transformações.

Antes de apresentar as transformações de dualidade entre os campos de forma explícita, pode-se discutir como ela é estabelecida sob a perspectiva da ação. Para que (288) seja invariante sob transformações de dualidade, deve-se considerar as seguintes transformações

$$F_{\mu\nu} \to G_{\mu\nu}; \tag{289}$$

$$G_{\mu\nu} \to -F_{\mu\nu}; \tag{290}$$

$$A_{\mu\nu} \to C_{\mu\nu}; \tag{291}$$

$$C_{\mu\nu} \to -A_{\mu\nu}; \tag{292}$$

$$J_e^{\mu} \to J_m^{\mu}; \tag{293}$$

$$J_m^{\mu} \to -J_e^{\mu}; \tag{294}$$

E note que para que se estabeleça de forma completa a dualidade eletromagnética, deve-se considerar ainda

$$\theta \to -\theta. \tag{295}$$

As transformações de dualidade entre os campos que precisam ser empregadas nas equações de Maxwell para os fótons usual e dual são

$$\vec{E} \to \vec{B}; \tag{296}$$

$$\vec{B} \to -\vec{E}; \tag{297}$$

$$\vec{F} \to \vec{D}; \tag{298}$$

$$\vec{D} \to -\vec{F}; \tag{299}$$

$$\rho_e \to \rho_m; \tag{300}$$

$$\rho_m \to -\rho_e; \tag{301}$$

$$\vec{J}_e \to -\vec{J}_m; \tag{302}$$

$$\vec{J}_m \to -\vec{J}_e. \tag{303}$$

$$\theta \to -\theta. \tag{304}$$

É possível perceber que o conjunto de transformações (246) - (253) tornam invariantes os campos que definem o sistema. Ainda há uma consideração importante a ser feita sobre o não-protagonismo do fóton dual sugerido pelo Singleton. É importante ressaltar que retirar de alguma forma o segundo fóton da teoria não promove inconsistências. No entanto, o foco do presente estudo é expor uma ação com dualidade para o sistema já descrito e, portanto, utilizar-se do Mecanismo de Higgs significa destruir a dualidade eletromagnética alcançada, já que a mesma foi estabelecida através do modelo de dois fótons. Este resultado, sem dúvidas, garante o ineditismo de todo este formalismo, uma vez que um sistema tão complexo como este ainda não foi amplamente discutido na literatura.

CONCLUSÃO

Nesta dissertação foi demonstrado que a abordagem sugerida no artigo (RODRIGUES, 2018) através do *ansatz* é auto-inconsistente além de não permitir a criação de uma ação que principalmente respeite à equação de Klein-Gordon.

As escolhas feitas para que o objetivo fosse alcançado representa uma das possibilidades de descrever o sistema. Pode ser que seja possível obter uma ação para o sistema utilizando-se de outro formalismo ou abordagem. A conquista foi consolidada através do uso de dois potenciais eletromagnéticos que, na prática, representaria a inserção de um novo fóton na teoria.

Para o sistema proposto no artigo (SINGLETON, 1995), a saída para justificar o não-protagonismo do fóton dual foi invocar o Mecanismo de Higgs que seria responsável por dar a massa para este segundo fóton e, portanto, não seria facilmente detectado. Considerar ou não o Mecanismo de Higgs, independentemente do tipo de sistema adotado, não faz com que a teoria se torne inconsistente. No entanto, ao utilizar-se deste mecanismo no sistema proposto nesta dissertação, a parte mais importante de todo o estudo que está inclusive presente no objetivo é facilmente destruída, já que a dualidade eletromagnética foi justamente alcançada em virtude da inclusão do fóton dual.

Além disso, estabeleceu-se a dualidade sem considerar[5] a Corda de Dirac que, como foi apresentado, é uma das formas de se incluir o monopolo magnético na teoria eletromagnética. A definição dos campos feitas no último capítulo foi importante para definir a partícula que aparece nas equações como o monopolo proposto por Dirac, uma vez que o mesmo interage com os campos fisicos, elétrico e magnético.

Foi possível apresentar as transformações de dualidade que tornam todo o sistema invariante, o que inclui a transformação discreta que o campo do áxion deve possuir e que possivelmente contribuirá com inúmeras fenomenologias. Para um estudo posterior, espera-se que a presente dissertação possa fornecer contribuições para a descrição de novas fenomenologias referentes à aplicabilidade da ação dual construída.

[5] Inspirado nos artigos de (SINGLETON, 1995) e (ZWANZIGER, 1971).

REFERÊNCIAS

ALEIXO, M. S. *Estudo sobre monopolos magnéticos e cargas elétricas em um plasma.* 2016. 40 f. Monografia (Graduação em Física) — Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

ANDO, Y. Topological insulator materials. *Journal of the Physical Society of Japan*, v. 82, n. 10, p. 36, Set 2013.

BOOKER, H. *Cold Plasma Waves.* Dordrecht: Martinius Nijhoff Publishers, 1984.

BUTKOV, E. *Física Matemática.* 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011. 724 p.

COOPER, J. B. J. S. L. Microscopy theory of superconductivity. *Physical Review*, v. 106, n. 162, p. 162, Fev 1957.

COOPER, J. B. J. S. L. Theory of superconductivity. *Physical Review*, v. 108, n. 5, p. 1175, Jul 1957.

COOPER, L. N. Bound electron pairs in a degenerate fermi gas. *Physical Review*, v. 104, n. 4, Nov 1956.

DIRAC, P. A. M. The theory of magnetic poles. *Physical Review*, v. 74, n. 7, p. 817 – 830, Out 1948.

FURUSAKI, A. L. S. R. A. S. A. Topological insulators and superconductors: way and dimensional hierarchy. *New Journal of Physics*, v. 12, 065010, Nov 2010.

GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Electrodynamics.* 3. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1999. 597 p.

HIGGS, P. W. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Physical Review Letters*, v. 13, n. 16, p. 508, Out 1964.

HIGGS, P. W. Broken symmetries, massless particles and gauge fields. *Phys. Letters*, v. 12, n. 2, p. 132, Jul 1964.

HIGGS, P. W. Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons. *Phys. Review*, v. 145, n. 4, p. 1156, Dez 1965.

JACKSON, J. *Classical Electrodynamics.* Illinois: John Wiley Sons, 1962.

KARCH, A. Electric-magnetic duality and topological insulators. *Physical Review Letters*, v. 2, p. 4, Jul. 2009.

KUMAR, A. *Dirac Monopoles and Electric-Magnetic Duality.* Disponível em: http://www.niser.ac.in/wiki/images/Monopole1.pdf. Acesso em: 21 set 2019.

MAJORANA, E. *A symmetric theory of electrons and positrons. Berlin: Springer, [2006].*, https://doi.org/10.1007/978-3-540-48095-$2_1$0.

MARTIN-RUIZ, A. The magnetoelectric coupling in electrodynamics. *International Journal of Modern Physics A*, v. 34, n. 28, 2019.

MEYER-VERNET, N. Electromagnetic waves in a plasma containing both electric charges and magnetic monopoles. *American Journal of Physics*, v. 50, n. 11, Nov 1982.

MIGNACO, J. Electromagnetic duality, charges, monopoles, topology,... *Brazilian Journal of Physics*, v. 31, p. 235, Jun 2001.

NAKAHARA, M. *Geometry, topology and physics*. 2. ed. Londres: IoPP, 2003. 584 p.

NETO, J. B. *Matemática para físicos com aplicações*: Vol. 1 - vetores, tensores e spinores. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010. 315 p.

PECCEI, H. Q. R. Cp conservation in the presence of pseudoparticles. *Physical Review Letters*, v. 38, n. 25, p. 1440, Junho 1977.

RAFFELT G., S. L. Mixing of the photon with low-mass particles. *Physical Review D*, v. 37, n. 5, Mar 1988.

RODRIGUES, H. T. e. J. M. J. Axion-plasmons polaritons in strongly magnetized plasmas. *Physical Review Letters*, v. 120, 181803, 2018.

RUKHADZE, A. A. L. B. A. *Principles of Plasma Electrodynamics*. Munique: Springer, 1984.

SATO, Y. A. M. Topological superconductor: a review. *Rep. Prog. Phys*, v. 80, 076501, Ago 2016.

SCHWINGER, J. A magnetic model of matter. *Science*, p. 757, Ago 1969.

SINGLETON, D. Electromagnetism with magnetic charge and two photons. *American Journal of Physics*, v. 64, n. 4, p. 452, Jul 1995.

SUDBERY, A. A vector lagrangian for the electromagnetic field. *J. Phys. A: Math Gen*, v. 19, p. L33, Ago 1985.

TIWARI, S. *Role of local duality invariance in axion electrodynamics of topological insulators*. Set 2011, arXiv:1109.0829.

VISINELLI, L. Axion-electromagnetic waves. *Modern Physics Letters A*, v. 28, n. 35, Out 2013.

WEYL, H. Gravitation and the electron. *Proc N A S*, Princeton, p. 323, Mar 1929.

WILCZEK, F. Two applications of axion electrodynamics. *Physical Review Letters*, v. 58, n. 18, p. 1799, May 1987.

WITTEN, E. Dyons of charge $\frac{e\theta}{2\pi}$. *Physics Letters*, p. 283, Out 1979.

ZHANG, J. Z. X.-L. Q. R. X. S.-C. Seeing the magnetic monopole through the mirror of topological surface states. *Science*, v. 323, p. 1184, 2009.

ZHANG, X. Q. S. Topological insulators and superconductors. *Rev. Mod. Phys*, v. 83, n. 1057, Ago 2010.

ZWANZIGER, D. Local-lagrangian quantum field theory of electric and magnetic charges. *Physical Review D*, v. 3, n. 4, p. 880, Fev. 1971.

APÊNDICE A – Revisitando o Plasma

Essa é uma reprodução enxuta do trabalho (ALEIXO, 2016) já finalizado. O objetivo é apresentá-lo neste presente estudo como uma forma de motivação além de expor os devidos contrapontos sobre a forma de encarar o áxion, tratado neste Apêndice como termo axiônico (constante) e agora, nesta dissertação, como o áxion (campo).

Como já bem citado, este estudo preliminar que será exposto neste apêndice foi feito tendo o trabalho de Meyer-Vernet (MEYER-VERNET, 1982) como um guia de como o plasma seria caracterizado.

A discussão se iniciou com a descrição da força de Lorentz generalizada que garante simetria entre as cargas, definida sob a forma

$$\vec{f} = \rho_e \vec{E} + \vec{J}_e \times \vec{B} + \mu \rho_m \vec{H} - \mu \vec{J}_m \times \vec{D} \tag{305}$$

Enfatizando todo o *toy model*: há um plasma com cargas elétricas e magnéticas. O áxion ainda é visto como termo axiônico e constante. É inserido mais à frente com as relações constitutivas que desencadearão reflexos durante toda a discussão.

As cargas elétricas sofrem influência dos dois primeiros termos enquanto as magnéticas são influenciadas pelos dois últimos. Denotando, respectivamente, o número de cargas elétricas e magnéticas - por unidades de volume - no interior deste plasma por n_e e n_m, as equações de movimento para as duas naturezas de cargas são

$$n_e m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = n_e e_e \vec{E} + n_e e_e \vec{v}_e \times \vec{B}; \tag{306}$$

$$n_m m_m \frac{d\vec{v}_m}{dt} = n_m e_m \mu \vec{H} - \mu n_m e_m \vec{v}_m \times \vec{D}. \tag{307}$$

Como as densidades de corrente elétrica e magnética são definidas, respectivamente, por $\vec{J}_e = n_e e_e \vec{v}_e$ e $\vec{J}_m = n_m e_m \vec{v}_m$, as equações anteriores se reduzem a

$$n_e e_e \frac{d\vec{J}_e}{dt} = n_e e_e \varepsilon \omega_e^2 \vec{E} + \varepsilon \omega_e^2 \vec{J}_e \times \vec{B}; \tag{308}$$

$$n_m e_m \frac{d\vec{J}_m}{dt} = n_m e_m \omega_m^2 \vec{H} - \omega_m^2 \vec{J}_m \times \vec{D}. \tag{309}$$

em que ω_e e ω_m são as frequências de vibração relativas às cargas elétricas e magnéticas, respectivamente, definidas por

$$\omega_e^2 = \frac{n_e e_e^2}{m_e \varepsilon}; \tag{310}$$

$$\omega_m^2 = \frac{\mu n_m e_m^2}{m_m}. \tag{311}$$

No plasma de Meyer-Vernet os termos não-lineares da força de Lorentz são desprezados. Esta consideração faz com que a descrição algébrica se torne um pouco mais simples, mas há uma fenomenologia dentro de tal consideração. Alguns autores defendem que essa aproximação conhecida por *cold plasma* considera que a pressão no interior do plasma para as cargas elétricas, íons e partículas neutras não é tão importante para a propagação de ondas eletromagnéticas em seu interior (BOOKER, 1984). Ou ainda que as velocidades térmicas das partículas em seu interior são muito menores que qualquer outra velocidade característica que puder ser considerada (RUKHADZE, 1984).

As equações de movimento além de serem acopladas são diferenciais de segunda ordem. Tentando simplificar o tratamento algébrico no estudo, utilizou-se uma descrição no espaço dual com o auxílio da Transformada de Fourier apresentada no APÊNDICE C. Considerando a aproximação de *cold plasma* no espaço dual, as equações 308 e 309 se tornam

$$(-i\omega)m_e\vec{v}_e = e_e\vec{E} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_e = \frac{ie_e}{m_e\omega}\vec{E}; \tag{312}$$

$$(-i\omega)m_m\vec{v}_m = \mu e_m\vec{H} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_m = \frac{i\mu e_m}{m_e\omega}\vec{H}. \tag{313}$$

sendo ω a frequência de oscilação do plasma. O termo axiônico - ou topológico - será incluso através das relações constitutivas (54) e (55) já mencionadas, isto é

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} - \theta\vec{B}; \tag{314}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B} + \theta\vec{E}. \tag{315}$$

em que $\vec{D} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{E}}$ e $\vec{H} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{B}}$ são campos definidos (KARCH, 2009) a partir de uma ação que contém o termo $\sim \theta \int d^3x \; dt \; \vec{E}\cdot\vec{B}$.

Aplicando a Transformada de Fourier na equação da continuidade para as cargas magnéticas e elétricas (40) e (41) tem-se

$$i\vec{k}\cdot\vec{J}_e = i\omega\rho_e; \quad \rightarrow \quad \rho_e = \frac{\vec{k}\cdot\vec{J}_e}{\omega} \tag{316}$$

$$i\vec{k}\cdot\vec{J}_m = i\omega\rho_m \quad \rightarrow \quad \rho_m = \frac{\vec{k}\cdot\vec{J}_m}{\omega}. \tag{317}$$

em que $\vec{k}$ é o vetor de onda no espaço dual. Utilizando as equações (312) e (313), as densidades de corrente se tornam

$$\vec{J}_e = n_e e_e\frac{ie_e}{m_e\omega}\vec{E}; \tag{318}$$

$$\vec{J}_m = n_m e_m\frac{i\mu e_m}{m_m\omega}\vec{H}. \tag{319}$$

Assim, as equações de Maxwell teriam a forma

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_e; \tag{320}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=\mu\rho_m; \tag{321}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{J}_e; \tag{322}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-\mu\vec{J}_m. \tag{323}$$

E no espaço de Fourier, utilizando as equações (318) e (319), as equações anteriores se tornam

$$i\vec{k}\cdot\vec{D}=\rho_e; \tag{324}$$
$$i\vec{k}\cdot\vec{B}=\mu\rho_m; \tag{325}$$
$$i\vec{k}\times\vec{H}=-i\omega\vec{D}+\frac{i\omega_e^2\varepsilon}{\omega}\vec{E}; \tag{326}$$
$$i\vec{k}\times\vec{E}=-i\omega\vec{B}-\frac{i\mu\omega_m^2}{\omega}\vec{H}. \tag{327}$$

na qual, agora, a dependência dos campos é $(\vec{k},\omega)$ e não mais $(\vec{r},t)$ (JACKSON, 1962). Usando (314) em (326) encontra-se

$$\vec{k}\times\vec{H}=-\omega(\varepsilon\vec{E}-\theta\vec{B})+\frac{\omega_e^2\varepsilon}{\omega}\vec{E}. \tag{328}$$

Eliminando o campo $\vec{B}$ na equação anterior com o uso de (315) tem-se

$$\vec{k}\times\vec{H}=-\omega\varepsilon\vec{E}+\omega\theta(\mu\vec{H}-\mu\theta\vec{E})+\frac{\omega_e^2\varepsilon}{\omega}\vec{E}. \tag{329}$$

Definindo $\varepsilon_e=(1-\frac{\omega e^2}{\omega^2})$, pode-se reescrever a equação anterior da seguinte forma

$$\vec{k}\times\vec{H}=-\omega\varepsilon\varepsilon_e\vec{E}-\omega\mu\theta^2\vec{E}+\mu\omega\theta\vec{H}. \tag{330}$$

Da equação (327), utilizando (315), obtém-se

$$\vec{k}\times\vec{E}=\omega\mu\vec{H}-\mu\omega\theta\vec{E}-\frac{\omega_m^2\mu}{\omega}\vec{H}$$
$$\Rightarrow\vec{k}\times\vec{E}=\omega\mu\vec{H}\left(1-\frac{\omega_m^2}{\omega^2}\right)-\mu\omega\theta\vec{E}$$
$$\vec{H}=\frac{1}{\mu\omega\varepsilon_m}(\vec{k}\times\vec{E}+\mu\omega\theta\vec{E}). \tag{331}$$

com $\varepsilon_m\neq 0$ e $\varepsilon_m=(1-\frac{\omega_m^2}{\omega^2})$. Aplicando o produto vetorial do vetor $\vec{k}$ na equação anterior, obtém-se

$$\vec{k} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu\omega\varepsilon_m}[\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \mu\omega\theta\ \vec{k} \times \vec{E}]. \tag{332}$$

Usando (330) e (331) na equação anterior, tem-se

$$\begin{aligned}
&\omega\mu\varepsilon_m\ \vec{k} \times \vec{H} = \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \mu\omega\theta\ \vec{k} \times \vec{E} \\
&\Rightarrow \omega\mu\varepsilon_m(-\omega\varepsilon\varepsilon_e\vec{E} - \omega\mu\theta^2\vec{E} + \mu\omega\theta\vec{H}) = \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \mu\omega\theta\ \vec{k} \times \vec{E} \\
&\Rightarrow -\omega^2\mu\varepsilon\varepsilon_e\varepsilon_m\vec{E} - \omega^2\mu^2\theta^2\varepsilon_m\vec{E} + \mu^2\omega^2\varepsilon_m\theta\vec{H} = \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \mu\omega\theta\ \vec{k} \times \vec{E} \\
&\Rightarrow -\omega^2\mu\varepsilon\varepsilon_e\varepsilon_m\vec{E} - \omega^2\mu^2\theta^2\varepsilon_m\vec{E} + \cancel{\mu\omega\theta\ \vec{k} \times \vec{E}} + \mu^2\omega^2\theta^2\vec{E} = \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \cancel{\mu\omega\theta\ \vec{k} \times \vec{E}} \\
&\Rightarrow \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = (-\omega^2\mu\varepsilon\varepsilon_e\varepsilon_m - \mu^2\omega^2(\varepsilon_m - 1)\theta^2)\vec{E}
\end{aligned} \tag{333}$$

Da equação anterior, pode-se definir uma nova função

$$\tilde{\varepsilon}(\omega, \theta) = \omega^2\mu\varepsilon\varepsilon_e\varepsilon_m + \mu^2\omega^2(\varepsilon_m - 1)\theta^2 \tag{334}$$

Desta forma, a equação 333 pode ser escrita sob a forma

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -\tilde{\varepsilon}\vec{E}, \tag{335}$$

cuja forma matricial pode ser expressa por

$$[k_ik_j - (k^2 - \tilde{\varepsilon})\delta_{ij}]E_j = \Delta_{ij}E_j = 0 \tag{336}$$

Para que haja solução, o determinante de Δ_{ij} deve ser nulo. Ao calcular o determinante (APÊNDICE B), encontra-se

$$\tilde{\varepsilon}(k^2 - \tilde{\varepsilon})^2 = 0 \tag{337}$$

Desta forma, para que a equação anterior seja satisfeita é necessário analisar os dois casos. Para o primeiro em que $\tilde{\varepsilon} = 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
&\cancel{\omega^2}\cancel{\mu}\varepsilon\varepsilon_e\varepsilon_m + \mu^{\cancel{2}}\cancel{\omega^2}(\varepsilon_m - 1)\theta^2 = 0 \\
&\Rightarrow (\omega^2 - \omega_e^2)(\omega^2 - \omega_m^2) - \frac{\mu}{\varepsilon}\omega^2\omega_m^2\theta^2 = 0.
\end{aligned} \tag{338}$$

O caso $\theta = 0$ resgata a conclusão feita por Meyer-Vernet em seu artigo e corresponde às oscilações longitudinais dos campos elétrico e magnético, respectivamente representados por $\omega^2 = \omega_e^2$ e $\omega^2 = \omega_m^2$.

Para o segundo caso $\tilde{\varepsilon} = k^2$, tem-se

$$\begin{aligned}
&\omega^2\mu\varepsilon\varepsilon_e\varepsilon_m + \mu^2\omega^2(\varepsilon_m - 1)\theta^2 = k^2 \\
&\Rightarrow \omega^2\left(1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2}\right)\left(1 - \frac{\omega_m^2}{\omega^2}\right) + \frac{\mu}{\varepsilon}\omega^2\left(\cancel{1} - \frac{\omega_m^2}{\omega^2} + \cancel{1}\right)\theta^2 = \frac{k^2}{\mu\varepsilon} \\
&\Rightarrow \cancel{\omega^2}\left(\frac{\omega^2 - \omega_e^2}{\cancel{\omega^2}}\right)\left(\frac{\omega^2 - \omega_m^2}{\omega^2}\right) + \frac{\mu}{\varepsilon}\cancel{\omega^2}\left(-\frac{\omega_m^2}{\cancel{\omega^2}}\right)\theta^2 = \frac{k^2}{\mu\varepsilon} \\
&\Rightarrow (\omega^2 - \omega_e^2)(\omega^2 - \omega_m^2) - \frac{\mu}{\varepsilon}\omega^2\omega_m^2\theta^2 = \frac{k^2\omega^2}{\mu\varepsilon}. \qquad (339)
\end{aligned}$$

Este é o caso que representa as oscilações transversas da onda eletromagnética. O caso $\theta = 0$ novamente pode ser encontrado no artigo de Meyer-Vernet.

Paralelamente ao que foi exposto, há uma outra discussão bastante breve sobre a fenomenologia do efeito Witten, que apresenta uma partícula que possui carga elétrica e magnética de forma simultânea (WITTEN, 1979).

O sistema apresentado também pode resgatar tal efeito. Para perceber como o termo θ produz tal descrição é necessário aplicar o divergente nas equações (308) e (309), negligenciando os termos de produto vetorial - ou seja, considerando a aproximação de *cold plasma*. Desta forma, elas ganham a forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{J_e}) = \varepsilon\omega_e^2\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial^2\rho_e}{\partial t^2} \qquad (340)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{J_m}) = \omega_m^2\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\frac{\partial^2\rho_m}{\partial t^2}. \qquad (341)$$

E utilizando (314) e (315) e as equações de Maxwell (324) - (**??**), tem-se

$$-\frac{\partial^2\rho_e}{\partial t^2} = \omega_e^2(\rho_e + \theta\mu\rho_m); \qquad (342)$$

$$-\frac{\partial^2\rho_m}{\partial t^2} = \omega_m^2\rho_m + \frac{\theta\omega_m^2}{\varepsilon}(\rho_e + \theta\mu\rho_m), \qquad (343)$$

que já foram apresentadas previamente.

APÊNDICE B – Cálculo do determinante de Δ_{ij}

A equação pode ser resolvida a partir da identidade da Análise Vetorial

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}). \tag{344}$$

E, portanto, assume a forma

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) - \vec{E}(\vec{k} \cdot \vec{k}) = -\tilde{\varepsilon}\vec{E}. \tag{345}$$

Sob a forma matricial, a equação anterior pode ser expressa assim

$$\begin{aligned} &k_i k_j E_j - k^2 E_i + \tilde{\varepsilon} E_i = 0; \\ &\Rightarrow [k_i k_j - (k^2 - \tilde{\varepsilon})\delta_{ij}]E_j = \Delta_{ij} E_j = 0 \end{aligned} \tag{346}$$

Como foi dito, deve-se calcular o determinante de Δ_{ij} para que o sistema possua solução, ou seja

$$\det \Delta_{ij} = \det \begin{pmatrix} k_1^2 - k^2 + \tilde{\varepsilon} & k_1 k_2 & k_1 k_3 \\ k_2 k_1 & k_2^2 - k^2 + \tilde{\varepsilon} & k_2 k_3 \\ k_3 k_1 & k_3 k_2 & k_3^2 - k^2 + \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix} = 0 \tag{347}$$

Expandindo o determinante, sabendo que $k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$, encontra-se

$$\begin{aligned} &(\tilde{\varepsilon} - k_2^2 - k_3^2)(\tilde{\varepsilon} - k_1^2 - k_3^2)(\tilde{\varepsilon} - k_1^2 - k_2^2) + 2\ k_1^2\ k_2^2\ k_3^2 \\ &\quad - k_1^2\ k_3^2\ (\tilde{\varepsilon} - k_1^2 - k_3^2) - k_1^2\ k_2^2\ (\tilde{\varepsilon} - k_1^2 - k_2^2) - k_2^2\ k_3^2\ (\tilde{\varepsilon} - k_2^2 - k_3^2) = 0 \end{aligned} \tag{348}$$

Reorganizando, tem-se

$$\begin{aligned} &(\tilde{\varepsilon}^2 - \tilde{\varepsilon}k_1^2 - \tilde{\varepsilon}k_2^2 - \tilde{\varepsilon}k_3^2 + k_1^2\ k_2^2 + k_2^2\ k_3^2 - \tilde{\varepsilon}k_3^2 + k_1^2\ k_3^2 + k_3^4)(\tilde{\varepsilon} - k_1^2 - k_2^2) \\ &\qquad + 2\ k_1^2\ k_2^2\ k_3^2 - \tilde{\varepsilon}k_1^2\ k_3^2 + k_1^4\ k_3^2 + k_1^2\ k_3^4 - \tilde{\varepsilon}k_1^2\ k_2^2 + k_1^4\ k_2^2 + k_1^2\ k_2^4 \\ &\qquad\qquad - \tilde{\varepsilon}k_2^2\ k_3^2 + k_2^4\ k_3^2 + k_2^2\ k_3^4 = 0. \end{aligned} \tag{349}$$

Distribuindo os parênteses e agrupando os termos, obtém-se, após o cancelamento

$$\begin{aligned} &\tilde{\varepsilon}^3 - \tilde{\varepsilon}^2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) + \tilde{\varepsilon}k_1^2\ k_2^2 + \tilde{\varepsilon}k_2^2\ k_3^2 - \tilde{\varepsilon}^2 k_3^2 + \tilde{\varepsilon}k_1^2\ k_3^2 + \tilde{\varepsilon}k_3^4 \\ &\qquad - \tilde{\varepsilon}^2 k_1^2 + \tilde{\varepsilon}k_1^4 + \tilde{\varepsilon}k_1^2\ k_2^2 + \tilde{\varepsilon}k_1^2\ k_3^2 - \tilde{\varepsilon}^2 k_2^2 + \tilde{\varepsilon}k_2^4 + \tilde{\varepsilon}k_2^2\ k_3^2 = 0. \end{aligned} \tag{350}$$

E ainda pode ser simplificada na forma

$$\tilde{\varepsilon}^3 - 2k^2\tilde{\varepsilon}^2 + \tilde{\varepsilon}^3 k^4 = 0$$
$$\Rightarrow \tilde{\varepsilon}(k^2 - \tilde{\varepsilon})^2 = 0. \tag{351}$$

Esta é a forma utilizada para dar prosseguimento na análise da relação de dispersão para o caso do plasma.

APÊNDICE C – Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma forma de transformar equações diferenciais em álgebricas, bem como as transformadas de Laplace fazem. No entanto, algumas sutilezas fazem desta transformada ser a mais aplicada no tratamento de algumas equações, sendo a principal delas o uso de uma exponencial complexa, diferentemente da exponencial real, como na transformada de Laplace.

A transformada de Fourier de uma função $f(x)$ pode ser definida (BUTKOV, 2011) por

$$F(k) = \mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ e^{ikx}\ dx. \tag{352}$$

A nova função obtida a partir da transformada é uma função de k e não mais de x. Para retornar à dependência anterior é necessário utilizar a transformada inversa de Fourier, ou seja

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(k)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\ e^{-ikx}\ dk. \tag{353}$$

É comum encontrar na literatura formas diferentes de se definir a transformada e sua inversa. As diferenças mais visíveis estão no sinal da exponencial e no fator de normalização da integral. Independente de como sejam definidas, sabe-se que a condição de normalização exige que o produto entre as constantes da transformada e de sua inversa seja $\frac{1}{2\pi}$ e, sendo assim, escrever $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ para cada, é o mais comum.

Fisicamente, as transformadas definidas anteriormente referem-se às funções que dependam de posição x e do vetor de onda $\vec{k}$, cuja dimensão é o inverso do comprimento - perfeito para que o termo na exponencial permaneça adimensional. É possível também encontrar funções que dependam do tempo t e, portanto, é necessário encontrar um candidato que torne a exponencial adimensional, ou seja, dimensão de inverso de tempo. Sendo assim, a frequência ω é o termo mais adequado para se acoplar. Para alguns cálculos mais específicos envolvendo análises de ondas ou outros aplicados à Engenharia, o fator $2\pi f$ é o mais encontrado.

Para uma função $f(t)$, a sua transformada pode ser expressa por

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ e^{i\omega t}\ dt. \tag{354}$$

E a transformada inversa pode ser expressa por

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\ e^{-i\omega t}\ d\omega. \tag{355}$$

Pode-se generalizar o conceito da transformada de Fourier e de sua inversa para funções que tem formato de um campo, ou seja

$$F(\vec{k}, \omega) = \mathcal{F}[f(\vec{x}, t)] = \int f(\vec{x}, t)\ e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}\ d\vec{x}\ dt. \tag{356}$$

$$f(\vec{x}, t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\vec{k}, \omega)] = \int F(\vec{k}, \omega)\ e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}\ d\vec{k}\ d\omega. \tag{357}$$

Sendo assim, para um campo $\vec{A}$ qualquer, o que a transformada de Fourier faz pode ser expresso por

$$A \equiv A\ (\vec{x}, t) \quad \rightarrow \quad \tilde{A} \equiv \tilde{A}\ (\vec{k}, \omega). \tag{358}$$

Essa mudança de dependência é bastante conhecida. Diz-se que o campo que é obtido após a aplicação da transformada está no espaço dual, ou espaço de Fourier.

A aplicação desta formulação é vasta e no tratamento das ondas eletromagnéticas, o espaço dual é uma forma mais fácil de analisar a relação de dispersão que é definida entre $\vec{k}$ e ω.

A transformada de Fourier possui inúmeras propriedades. Uma delas vem da transformada de Fourier de uma derivada.

Considere uma função $f(x)$, cuja n-ésima derivada possa ser representada por $f^n(x) \equiv \frac{d^n f(x)}{dx^n}$. A transformada de Fourier da derivada primeira da função $f(x)$ é

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(x)}{dx}\ e^{ikx}\ dx. \tag{359}$$

Realizando o processo de integração por partes, obtém-se

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx}\left(f(x)\ e^{ikx}\right)\ dx\ -\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \frac{d(e^{ikx})}{dx}\ dx. \tag{360}$$

O Teorema Fundamental do Cálculo propõe a igualdade

$$\int_a^b \frac{dg(x)}{dx}\ dx = g(b) - g(a). \tag{361}$$

Sendo assim, as duas últimas equações se tornam

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f(x)\ e^{ikx} \right) |_{-\infty}^{+\infty}\ -\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ (ik)\ e^{ikx}\ dx. \tag{362}$$

E como pode-se considerar que $f(+\infty) = f(-\infty) = 0$, a equação anterior se resulta em

$$\mathcal{F}[f'(x)] = -(ik)\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ e^{ikx}\ dx \equiv (-ik)\ \mathcal{F}[f(x)]. \tag{363}$$

Considerando uma função $f(t)$, sob processos análogos, a transformada de Fourier da derivada primeira teria a forma

$$\mathcal{F}[f'(t)] = -(i\omega)\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ e^{i\omega t}\ dt \equiv (-i\omega)\ \mathcal{F}[f(t)]. \tag{364}$$

Pode-se ainda realizar passos semelhantes para obter a transformada de Fourier para a derivada segunda para os dois tipos de funções. Considerando inicialmente a função $f(x)$, pode-se expor

$$\mathcal{F}[f''(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\ e^{ikx}\ dx. \tag{365}$$

Integrando por partes, tem-se

$$\mathcal{F}[f''(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{df(x)}{dx}\ e^{ikx} \right)\ dx\ -\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(x)}{dx} \frac{d(e^{ikx})}{dx}\ dx. \tag{366}$$

E usando novamente o Teorema Fundamental do Cálculo, encontra-se

$$\mathcal{F}[f''(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{df(x)}{dx}\ e^{ikx} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(x)}{dx}\ (ik)\ e^{ikx}\ dx. \tag{367}$$

Considerando $f'(+\infty) = f'(-\infty) = 0$, encontra-se

$$\mathcal{F}[f''(x)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(x)}{dx}\ (ik)\ e^{ikx}\ dx\ \equiv\ (-ik)\ \mathcal{F}[f'(x)] \tag{368}$$

Fica fácil concluir

$$\mathcal{F}[f''(x)] = (-ik)\ \mathcal{F}[f'(x)] = (-ik)\ (-ik)\ \mathcal{F}[f(x)] \tag{369}$$

O mesmo aconteceria se acaso a função fosse $f(t)$, assim

$$\mathcal{F}[f''(t)] = (-i\omega)\ \mathcal{F}[f'(t)] = (-i\omega)\ (-i\omega)\ \mathcal{F}[f(t)] \tag{370}$$

Sendo assim, para ordens superiores, a generalização para os dois tipos de funções seria

$$\mathcal{F}[f^n(x)] = (-ik)^n \ \mathcal{F}[f(x)]; \tag{371}$$

$$\mathcal{F}[f^n(t)] = (-i\omega)^n \ \mathcal{F}[f(t)]. \tag{372}$$